

Isomorphie- und Approximationsprobleme in $A(K)$

von

Hans-Ulrich Heß

aus

Bad Soden-Salmünster

1976
—

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Isomorphie- und Approximationsprobleme in $A(K)$

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt

von

Hans-Ulrich Heß

aus

Bad Soden-Salmünster

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissen-
schaftlichen Fachbereichen der Universität
Erlangen-Nürnberg.



Tag der mündlichen Prüfung:

3.2.1976

Vorsitzender der kommissarischen

Promotionskommission

Prof. Dr. H. Kemmert

Erstberichterstatter:

Prof. Dr. D. Kölzow

Zweitberichterstatter:

Prof. Dr. H. Bauer

Inhaltsverzeichnis

<u>Einleitung</u>	1
<u>Terminologie und Bezeichnungen</u>	6
I. <u>M-Mengen</u>	7
1. Charakterisierung von M-Mengen.	8
2. Beispiele	13
3. Repräsentation von Punkten durch Handmaße.	26
II. <u>M-Mengen Approximation für $\mathcal{A}(K)$.</u>	31
III. <u>Anwendungen auf die Isomorphie- theorie von Banachräumen.</u>	40
1. Jeder Banachraum ist isomorph zu einem $\mathcal{A}(K)$ -Raum .	40
2. Repräsentation separabler Banach- räume durch $C(X)$ -Räume .	43
IV. <u>Isometrische Charakterisierungen von $\mathcal{A}(K)$-Räumen in der Klasse der Banachräume.</u>	45
V. <u>Sätze vom Korovkin'schen Typ für $\mathcal{A}(K)$-Räume.</u>	50

Einleitung

Die vorliegende Arbeit hat die folgenden vier Hauptprobleme zum Gegenstand: die Lösung eines verallgemeinerten Dirichlet-Problems (Kap.I.), eine neue isomorphe Darstellung jedes Banachraumes durch einen $\mathcal{A}(K)$ -Raum (Kap.III.), eine neue isometrische Charakterisierung von $\mathcal{A}(K)$ -Räumen (Kap.IV) und die Formulierung von Korovkin-Sätzen für $\mathcal{A}(K)$ -Räume (Kap.V) .

Die Grundfrage des ersten Kapitels leitet sich aus der folgenden Abschwächung des bekannten Dirichlet-Problems her: Kann man mit Hilfe eines Integralkalküls aus der Gesamtheit der stetigen Funktionen auf dem Abschluß der Extrempunktmenge einer konvexen Menge die Gesamtheit der stetigen, affinen Funktionen gewinnen? Wir verallgemeinern diese Fragestellung, indem wir den Abschluß der Extrempunktmenge durch den wie folgt definierten Begriff der Berandung ersetzen:

Eine kompakte Teilmenge E einer konvexen Menge K heißt Berandung von K , wenn je zwei auf E übereinstimmende stetige, affine Funktionen identisch sind und die Menge $\left\{ \frac{\|a\|}{\|a\|_E} \mid a \in f_-(K) \setminus \{0\} \right\}$ beschränkt ist.

Für eine Berandung E einer konvexen Menge K ergibt sich so das folgende verallgemeinerte Dirichlet-Problem:

Existiert zu jedem $k \in K$ ein Maß $\nu_k \in \mathcal{M}(K)$ derart, daß für jedes $f \in C(E)$ die k durch $\tilde{f}(k) := \int_E f d\nu_k$ definierte Funktion $\tilde{f}: K \rightarrow K$ stetig und affin ist, und es zu jedem $a \in \mathcal{A}(K)$ ein $f \in C(E)$ mit $a = \tilde{f}$ gibt?

Im Mittelpunkt des ersten Kapitels steht die Angabe hinreichender Bedingungen für die Lösbarkeit unseres verallgemeinerten Dirichlet-Problems. Wie wir dabei nachweisen, ist für jede kompakte, konvexe Menge K die Lösbarkeit dieses Problems äquivalent zu der Möglichkeit, K mit einer gewissen Menge von Maßen auf einer Berandung von K zu identifizieren. Diese geometrische Charakterisierung veranlaßt uns dazu, die erwähnten konvexen Mengen als M-Mengen (Maß-Mengen, Def. S.6) zu bezeichnen. Wir zeigen, daß jede kompakte, konvexe Teilmenge eines endlich-dimensionalen Vektorraumes sowie jedes metrisierbare Simplex mit überabzählbar vielen Extrempunkten eine M-Menge ist.

Die in der Formulierung unseres verallgemeinerten Dirichlet-Problems auftretenden Maße ν_K sind im allgemeinen keine darstellenden Maße. Statt dessen können wir für eine keihe von M-Mengen K mit Berandung E die Existenz einer stetigen, affinen Abbildung $\mu: K \rightarrow M(E)$ und eines zu $C(K)$ isomorphen Teilraumes A von $A(K)$ nachweisen, so daß für jedes $k \in K$ und $a \in A$ die Gleichung $\int_E a d\mu_K = a(k)$ erfüllt ist (S.26).

Anschließend beweisen wir den folgenden

Satz (S.31) :

Für jede metrisierbare, kompakte, konvexe Menge K mit nicht-separablen $A(K)$ ist

$A(K)$ gleich dem Durchschnitt einer Familie $(B_i)_{i \in I}$ zulässiger Teilräume B_i von $C(K)$, deren Zustandsräume M-Mengen sind und welche den folgenden Bedingungen genügen:

- i) $(B_i)_{i \in I}$ ist gerichtet bezüglich der Teilmengenrelation.
- ii) $Ex(K) = \bigcap_{i \in I} ex(B_i)$.

Außerdem geben wir eine isometrische Charakterisierung der $\mathcal{A}(K)$ -Räume. Es sei darauf hingewiesen, daß TAYLOR [14] eine weitere isometrische Charakterisierung von $\mathcal{A}(K)$ -Räumen formuliert hat.

Wir zeigen ferner, daß jeder Banachraum linear-homöomorph zu einem $\mathcal{A}(K)$ -Raum ist. Dieses Ergebnis bewies bereits BEHKENDS [2] auf anderem Wege. Unter Verwendung des eben erwähnten Resultates erhalten wir das folgende Korollar (S.43) :

- Jeder separable Banachraum mit nicht-separablem Dual ist linear-homöomorph zu einem Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} F_i$ von zulässigen Teilräumen F_i eines Raumes $C(Y)$, Y kompakt, mit den folgenden Eigenschaften:
- i) $(F_i)_{i \in I}$ ist gefiltert bezüglich der Teilmengenrelation.
 - ii) Für jedes $i \in I$ ist F_i ein $C(X)$ -Raum
 - iii) $\bigcap_{i \in I} \mathcal{D}_{\mathcal{A}}(F_i) = \mathcal{D}_{\mathcal{A}}(\bigcap_{i \in I} F_i)$.

In Kapitel V beweisen wir einen Satz vom Korovkin'schen Typ für $\mathcal{A}(K)$ -Räume. Zur Erläuterung dieses Satzes erinnern wir zunächst an ein bekanntes Resultat (BAUER [1]) :

Ist X ein kompakter Hausdorffraum, so ist jeder zulässige Teilraum T von $C(X)$ mit $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}(T) = X$ ein Korovkinsystem für $C(X)$.

Man sieht leicht ein, daß die nächste Aussage äquivalent zu obigem Ergebnis ist.

Ist X ein kompakter Hausdorffraum, so ist jeder lineare Teilraum von $\mathcal{A}(\mathcal{M}_c^*(X))$, welcher $1_{\mathcal{M}_c^*(X)}$ enthält und $\text{Ex}(\mathcal{M}_c^*(X))$ von $\mathcal{M}_c^*(X)$ trennt, für $\mathcal{A}(\mathcal{M}_c^*(X))$ ein Korovkinsystem.

In Lemma V.22 wird gezeigt, daß die folgende Verallgemeinerung dieses Resultates möglich ist:

Ist K eine kompakte, konvexe Menge und ist T ein linearer Teilraum von $\mathcal{A}(K)$, welcher 1_K enthält und $\text{Ex}(K)$ von K trennt, so ist T für $\mathcal{A}(K)$ ein Korovkinsystem.

An dieser Stelle fragen wir, ob ein linearer Teilraum T von $\mathcal{A}(K)$ nicht schon dann ein Korovkinsystem für $\mathcal{A}(K)$ ist, wenn er nur eine Teilmenge aus $\text{Ex}(K)$ von K trennt. Zur Beantwortung dieser Frage führen wir für ein Maß μ auf K den Begriff des μ -fast-ganz K von K trennenden Teilraumes, des μ -Korovkinsystems, und schließlich den Begriff des Erzeugendensystems vom I-Typ ein. Dann lautet unser Korovkin-Satz folgendermaßen (S.52) :

Aus der Existenz eines w^* -Erzeugendensystems vom I-Typ für $\mathcal{A}(K)$ folgt die Existenz eines von $\text{Ex}(K)$ getragenen Maßes μ , für welches jeder μ -fast-ganz K von K trennende Teilraum von $\mathcal{A}(K)$ ein μ -Korovkinsystem für $\mathcal{A}(K)$ ist.

Hier wollen wir noch auf eine Anwendung unseres Satzes aufmerksam machen (S.65) :

Ist X ein kompakter, metrischer Raum und ist A ein zulässiger, komplementierter Teilraum von $C(X)$ mit separablem Dual, so gibt es ein Maß μ auf X , für welches jeder 1_X enthaltende Teilraum B von A mit $\mu(X \setminus \text{supp}(B)) = 0$ für A ein Korovkinsystem ist.

Als eine weitere Anwendung des oben angegebenen Satzes erhalten wir das folgende Ergebnis (S.65) :

Für jeden überabzählbaren, kompakten, metrischen Raum Y besitzt der Raum $C(Y)$ keine $\mathfrak{w}^*$ -Basis vom Γ -Typ.

An dieser Stelle erlaube ich mir, meinem sehr verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr.D.Kölzow, für die Vergabe des Themas zu danken, sowie für die Unterstützung bei dieser Arbeit durch viele hilfreiche Gespräche.

Terminologie

Es seien A und B topologische Vektorräume,
 K_1 eine konvexe Teilmenge von A und K_2 eine
 konvexe Teilmenge von B .

A ist isomorph zu B ($A \simeq B$), wenn es eine
 lineare Homöomorphie von A auf B gibt.

A ist Quotient von B , wenn A iso-
 morph zu einem Quotienten-Raum von B ist.

K_1 ist affin-isomorph zu K_2 , wenn
 es eine affine Homöomorphie von K_1 auf K_2 gibt.

Es sei X ein kompakter Hausdorffraum. Ein
 linearer Teilraum A von $C(X)$ heißt
zulässiger Teilraum von $C(X)$, wenn

A die Funktion 1_X enthält und die Punkte von
 X trennt.

Bezeichnungen

Ist K eine konvexe Teilmenge eines topologischen
 Vektorraumes, so bezeichne

$\mathcal{A}(K)$ den Raum der stetigen, affinen, beschränkten
 Funktionen auf K und

$A(K)$ den Raum der beschränkten, affinen Funktionen
 auf K .

Es seien X ein kompakter Hausdorffraum, A ein zu-
 lässiger Teilraum von $C(X)$, E eine Teilmenge von
 X und f eine Funktion aus $C(X)$. Dann bezeichne

$\partial_{\mathcal{A}}(A)$ den Choquet-Rand von A ,

$\mathcal{M}(X)$ den Raum der Radonmaße auf X , versehen mit
 der w^* -Topologie,

$\mathcal{M}_1(X)$ die Menge der Radonmaße μ auf X mit $\|\mu\| \leq \alpha$,

$\mathcal{M}_1^+(X)$ die Menge der w -Maße auf X . Weiter sei

$\|f\|_E$ definiert durch $\|f\|_E := \sup_{x \in E} |f(x)|$.

Ist B ein Banachraum, so bezeichne

B_1 die Einheitskugel von B .

I. M-Mengen

In dieser Arbeit verstehen wir unter einer konvexen Menge stets eine konvexe Teilmenge eines lokal-konvexen topologischen Vektorraumes. Wir führen durch die folgenden zwei Definitionen die Begriffe der Berandung und der M-Menge (Maß-Menge) ein.

I.1.1 Definition:

Eine kompakte Teilmenge E einer konvexen Menge K heißt genau dann Berandung von K , wenn je zwei auf E übereinstimmende Funktionen $a, b \in \mathcal{A}(K)$

identisch sind und $\left\{ \frac{\|a\|}{\|a\|_E} \mid a \in \mathcal{A}(K) \setminus \{0\} \right\}$

beschränkt ist.

I.1.2 Beispiel:

Ist K eine kompakte, konvexe Menge, so ist $\overline{\text{Ex}}(K)$ eine Berandung von K .

I.1.3 Definition:

Eine konvexe Menge K heißt genau dann M-Menge, wenn es eine Berandung E von K gibt derart, daß $\overline{K}$ affin-isomorph zu einer norm-beschränkten, konvexen Teilmenge K' von $\mathcal{M}(E)$ ist, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

- a) $\text{VR}(K')$ ist schwach-abgeschlossen.
- b) K' liegt in einer schwach-abgeschlossenen Hper-ebene, welche $\underline{0}$ nicht enthält.

I.1.4 Bemerkung:

- 1.) Ist X ein kompakter Hausdorff-Raum, so erfüllt die konvexe Menge $K' := \mathcal{M}_\lambda^*(X)$ die Bedingungen a) und b).
- 2.) Sind K und K_λ affin-isomorphe, kompakte konvexe Mengen, so ist mit K auch K_λ eine M-Menge.

Wir bringen nun eine Charakterisierung, welche die Suche nach Beispielen spezieller M -Mengen erleichtert.

I.1.5 Proposition:

Es sei K eine relativ-kompakte, konvexe Menge, für die jedes $a \in \mathcal{A}(K)$ gleichmäßig stetig ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1) K ist eine M -Menge.
- 2) Es existieren eine kompakte Teilmenge E von K , ein norm-stetiger, linearer Operator $\psi: \mathcal{M}(E) \rightarrow \mathcal{M}(E)$ und für jedes $k \in K$ ein Maß $\mu_k \in \mathcal{M}(E)$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
 - α) Für jedes $k \in K$ repräsentiert μ_k den Punkt k .
 - β) $\mathcal{A}(K) = \left\{ \bar{f} \mid f \in C(E) \right\}$, wobei $\bar{f}: K \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\bar{f}(k) := \int_E f \, d\psi(\mu_k)$ definiert ist.
 - γ) $\left\{ \|\mu_k\| \mid k \in K \right\}$ ist beschränkt.
- 3) Es existieren eine Berandung E von K und für jedes $k \in K$ ein Maß $\nu_k \in \mathcal{M}(E)$ derart, daß $\mathcal{A}(K) = \left\{ \tilde{f} \mid f \in C(E) \right\}$, wobei $\tilde{f}: K \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\tilde{f}(k) := \int_E f \, d\nu_k$ definiert ist.
- 4) Es existiert eine Berandung E von K , für die $\mathcal{A}(K)$ ein Quotient von $C(E)$ ist.

I.1.6 Bemerkung:

- a) Aussage 2) aus Proposition I.1.5 besagt, daß die Menge der beschränkten, affinen, stetigen Funktionen auf K durch einen Integralkalkül aus der Menge der stetigen Funktionen auf einer Berandung E erzeugt werden kann.
- b) Falls in Aussage 2) aus Proposition I.1.5 der Operator Ψ die Identität ist, beinhalten die Bedingungen α) und β) nichts anderes als die Existenz einer stetigen, affinen Auswahl repräsentierender Maße $\mu_K \in \mathcal{M}(E)$.

I.1.7 Beweis von Proposition I.1.5:

Zunächst weisen wir die Äquivalenz der Aussagen α) , β) und 4) nach:

$2) \Rightarrow 3)$: E ist eine Berandung von K ; denn für je zwei auf E übereinstimmende Funktionen $a, b \in \mathcal{A}(K)$ und für jedes $k \in K$ gilt:

$$a(k) = \int_E a \, d\mu_K = \int_E b \, d\mu_K = b(k) \quad \text{und} \\ |a(k)| \leq \left| \int_E a \, d\mu_K \right| \leq \|a\|_E \cdot \|\mu_K\| \quad .$$

Für jedes $k \in K$ definieren wir $\nu_k := \Psi(\mu_K)$.

Dann erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\mathcal{A}(K) = \{ f \mid f \in C(E) \} = \{ \tilde{f} \mid f \in C(E) \} \quad .$$

$3) \Rightarrow 4)$: Wir definieren $L: C(E) \rightarrow \mathcal{A}(K)$ durch $(L(f))(k) := \int_E f \, d\nu_k$. Dann ist L auf Grund von 3) ein stetiger, linearer und surjektiver Operator. Demzufolge ist $\mathcal{A}(K)$ ein Quotient von $C(E)$.

$4) \Rightarrow 2)$: Aussage 4) hat die Existenz einer stetigen, linearen Surjektion $L: C(E) \rightarrow \mathcal{A}(K)$ zur Folge.

Wir definieren $T: C(E) \rightarrow C(E)$ durch

$T(f) := \text{Rest}_E L(f)$ und weiter

$$\phi: A(K) \rightarrow \left\{ \text{Rest}_E(a) \mid a \in A(K) \right\} \text{ durch}$$

$$\phi(a) := \text{Rest}_E(a) .$$

Da E eine Berandung von K ist, muß ϕ eine Isomorphie sein.

Für jedes $k \in K$ wählen wir μ_k als stetige,

lineare Fortsetzung von $(\phi^{-1})^*(\sum_k^\wedge)$ auf $C(E)$.

Zu $\alpha)$ und $\beta)$: Wir setzen $\psi := T^*$ und erhalten dann für $a \in A(K)$, $f \in C(E)$ und $k \in K$ die folgenden Gleichungen:

$$\int_E a \, d\mu_k = \left[(\phi^{-1})^*(\sum_k^\wedge) \right] (\text{Rest}_E a) = a(k) \quad \text{und}$$

$$\int_E f \, d\psi(\mu_k) = (T^*(\mu_k))(f) =$$

$$\mu_k(T(f)) = \mu_k(\text{Rest}_E(L(f))) =$$

$$= \sum_k^\wedge (\phi^{-1}(\text{Rest}_E(L(f)))) = (L(f))(k) .$$

So erhalten wir $\beta)$ aus der Gleichung

$$A(K) = L(C(E)) = \left\{ \bar{f} \mid f \in C(E) \right\} .$$

1) $\Rightarrow$ 4): Es seien K eine konvexe Menge,

E eine Berandung von K , und K' eine norm-beschränkte konvexe Teilmenge von $M(E)$ derart, daß $\bar{K}$ kompakt und affin-isomorph zu K' ist und K' die Voraussetzungen a) und b) von Definition I.1.3 erfüllt.

Wir definieren eine lineare Abbildung

$$\chi: C(E) \longrightarrow \mathcal{A}(K') \quad \text{durch} \quad [\chi(f)](k) := k(f) .$$

Die Stetigkeit von χ erhalten wir dann aus der folgenden Ungleichung:

$$\|\chi(f)\| = \sup_{k \in K'} |k(f)| \leq \left(\sup_{k \in K'} \|k\| \right) \cdot \|f\| \leq M \cdot \|f\| ,$$

wobei wir wegen Definition I.1.3 voraussetzen dürfen, daß $\sup_{k \in K'} \|k\| < \infty$ gilt.

Wir zeigen nun, daß $\chi(C(E))$ in $\mathcal{A}(K')$ dicht

liegt. Da die Menge $\left\{ g \in \mathcal{A}(K') \mid g \text{ läßt sich stetig und affin auf } \mathcal{M}(E) \text{ fortsetzen} \right\}$ in $\mathcal{A}(K')$ dicht liegt, reicht es, die Gleichung

$$\chi(C(E)) = \left\{ g \in \mathcal{A}(K') \mid g \text{ läßt sich stetig und affin auf } \mathcal{M}(E) \text{ fortsetzen} \right\} \quad \text{zu beweisen.}$$

Es sei nun $g \in \mathcal{A}(K')$ und g lasse sich zu einem stetigen, affinen $\tilde{g}: \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathbb{K}$ fortsetzen. Dann existieren ein $\alpha \in \mathbb{K}$ und ein $f \in C(E)$, so daß $\tilde{g}(\mu) = \alpha + \mu(f)$ für alle $\mu \in \mathcal{M}(E)$ gilt. Da K' in einer schwach-abgeschlossenen Hyperebene H mit $0 \notin H$ liegt, gibt es ein $f_0 \in C(E)$ derart, daß für alle $k' \in K'$ gilt: $k'(f_0) = \alpha$. Somit erhalten wir für $k' \in K'$:

$$\begin{aligned} g(k') &= \alpha + k'(f) = k'(f_0) + k'(f) = k'(f_0 + f) = \\ &= (\chi(f_0 + f))(k') ; g \text{ liegt also in } \chi(C(E)) . \end{aligned}$$

Umgekehrt läßt sich, wie man leicht sieht, jedes $f \in \chi(C(E))$ stetig und affin auf $\mathcal{M}(E)$ fortsetzen.

$$\begin{aligned}
\text{Da } \chi^*(\mathfrak{A}(K)) &= \left\{ \chi^*(\alpha \mathfrak{S}_k^A - \beta \mathfrak{S}_m^A) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, k, m \in K' \right\} = \\
&= \left\{ \alpha \chi^*(\mathfrak{S}_k^A) - \beta \chi^*(\mathfrak{S}_m^A) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, k, m \in K' \right\} = \\
&= \left\{ \alpha k - \beta m \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, k, m \in K' \right\} = \text{VR}(K) \text{ wegen}
\end{aligned}$$

Bedingung a) in Definition I.1.3 schwach-abgeschlossen ist, erhalten wir die Norm-abgeschlossenheit von $\chi(C(E))$ und damit auf Grund unserer Vorüberlegungen die Gleichung $\chi(C(E)) = \mathfrak{A}(K)$. Da sich jede Funktion aus $\mathfrak{A}(K)$ zu einer Funktion aus $\mathfrak{A}(\bar{K})$ fortsetzen läßt, und $\bar{K}$ zu K' affin-isomorph ist, erhalten wir die folgenden Relationen: $\mathfrak{A}(K) \simeq \mathfrak{A}(\bar{K}) \simeq \mathfrak{A}(K')$. Infolgedessen ist mit $\mathfrak{A}(K)$ auch $\mathfrak{A}(K)$ ein Quotient von $C(E)$.

4) $\Rightarrow$ 1) : Aus 4) und der Voraussetzung von I.1.5 folgt die Existenz einer Berandung E von K und einer stetigen, linearen Surjektion

$\chi: C(E) \rightarrow \mathfrak{A}(\bar{K})$. Die Abbildung $\chi^*: \mathfrak{A}(\bar{K}) \rightarrow C^*(E)$ ist dann schwach-stetig und injektiv. Deshalb ist $\chi^*(\bar{K})$ affin-isomorph zu $\bar{K}$. Wählen wir $g \in C(E)$ so, daß $\chi(g) = 1_{\bar{K}}$ gilt, so erhalten wir für jedes $k \in \bar{K}$: $\chi^*(k)(g) = \chi(g)(k) = 1$.

Demzufolge liegt $\chi^*(\bar{K})$ in einer schwach-abgeschlossenen Hyperebene H mit $0 \in H$. Weiter folgt aus der Gleichung $\text{VR}(\chi^*(\bar{K})) = \chi^*(\text{VR}(\bar{K})) = \chi^*(\mathfrak{A}(\bar{K}))$ und der Norm-abgeschlossenheit von $\chi(C(E))$, daß $\text{VR}(\chi^*(\bar{K}))$ schwach-abgeschlossen ist.

An dieser Stelle führen wir den Begriff der starken Berandung ein.

I.1.8 Definition:

Eine Berandung E einer konvexen Menge K heißt starke Berandung von K genau dann, wenn für jedes $k \in K$ ein Maß $\mu_k \in \mathcal{M}(E)$ existiert derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- 1) Für jede Funktion $f \in C(E)$ ist die durch

$$\tilde{f}(k) := \int_E f \, d\mu_k \quad \text{definierte Funktion } \tilde{f}: K \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig, affin und beschränkt.

- 2) Für jede Funktion $a \in A(K)$ gibt es ein $f \in C(E)$, für das $a = \tilde{f}$ gilt.

I.1.9 Bemerkung:

Auf Grund der Äquivalenz der Aussagen 1) und 3) von Proposition I.1.5 sehen wir sofort, daß die kompakten M -Mengen gerade diejenigen kompakten, konvexen Mengen sind, welche eine starke Berandung besitzen.

Wir werden nun einige Beispiele angeben, von denen das erste die anschauliche Motivation zur Einführung der M -Mengen lieferte.

I.2.1 Beispiel:

Wenn wir $K := \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leq 1 \right\}$, $x_1 := (-1, 0)$,

$x_2 := (0, 1)$ und $x_3 := (1, 0)$ setzen, dann ist K eine M -Menge und $\{x_1, x_2, x_3\}$ ist eine starke Berandung von K .

I.2.2 Beispiel:

Wir setzen $I := [0, 1]$, $S := \{ z \in \mathbb{K}^2 \mid |z| = 1 \}$

und $X := I \times S$, weiter sei $\phi: X \rightarrow X$ die durch $\phi(x, z) := (x, z \cdot e^{2\pi i x})$ definierte Homöomorphie.

Dann ist $K := \{ \mu \in \mathcal{M}(X) \mid \mu \text{ ist } \phi\text{-invariant} \}$

eine M -Menge und

$$E := \overline{\{ \mu \in K \mid \mu \text{ ist } \phi\text{-ergodisch} \}}$$

ist eine starke Berandung von K .

Wir sehen dies durch die folgende Überlegung ein: K ist eine schwach-kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathcal{M}(X)$, welche in einer schwach-abgeschlossenen Hyperebene H , mit $0 \notin H$, enthalten ist. Weiter gilt:

$$VR(K) = \{ \mu \in \mathcal{M}(X) \mid \mu \text{ ist } \phi\text{-invariant} \} ;$$

denn mit $\nu \in \mathcal{M}(X)$ sind auch ν^+ und ν^- ϕ -invariant, was zur Folge hat, daß jedes ϕ -invariante Maß $\nu \in \mathcal{M}(X)$ in $VR(K)$ liegt. $VR(K)$ ist also schwach-abgeschlossen. Wegen

$$E = \overline{\{ \mu \in K \mid \mu \text{ ist } \phi\text{-ergodisch} \}} = \overline{Ex(K)} \quad \text{und}$$

$$\{ S_x \mid x \in \{0\} \times S \} \subset E \quad \text{ist } E \text{ eine überab-}$$

zählbare Berandung von K . Durch Anwendung des Satzes von Milutin [12] auf die überabzählbaren, metrisierbaren, kompakten Mengen X und E erhalten wir die Isomorphierelation $C(X) \simeq C(E)$.

Daraus ergibt sich, daß $\mathcal{A}'(\bar{X})$ zu $\mathcal{A}'(E)$ schwach-isomorph ist. Infolgedessen ist K affin-isomorph zu einer Teilmenge K' von $\mathcal{A}'(E)$, welche die Bedingungen a) und b) in I.1.3 erfüllt. Dies hat zur Folge, daß K eine M -Menge ist und — wie aus dem Beweis von Proposition I.1.5 hervorgeht — daß E eine starke Berandung von K ist.

Zum besseren Verständnis von Proposition I.2.4 erinnern wir hier an den topologischen Ableitungsbegriff:

I.2.3 Definition:

Es sei A Teilmenge eines topologischen Raumes X . Dann bezeichne $A^{(\alpha)}$ die Menge aller Häufungspunkte von A . Für jede Ordinalzahl α definieren wir die α -te Ableitung $A^{(\alpha)}$ von A durch transfinite Induktion, indem wir

$A^{(\alpha+1)} := (A^{(\alpha)})^{(\alpha)}$ setzen und für nicht-kompakte

Ordinalzahlen λ definieren: $A^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha < \lambda} A^{(\alpha)}$.

$\kappa(A)$ bezeichne die kleinste Ordinalzahl γ , für die $A^{(\gamma)} = \emptyset$ gilt.

I.2.4 Proposition:

Es sei K ein kompaktes Simplex mit einer metrisierbaren, abzählbaren Berandung E , für die $\kappa(E) \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist K eine M -Menge, und E ist eine starke Berandung von K .

Beweis:

Wir setzen $\overline{\mathbb{N}} := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$.

Gemäß der Voraussetzung existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\kappa(E) = m$. Da außerdem $\kappa(\overline{\mathbb{N}}) = 2$ gilt , erhalten wir die folgende Gleichung:

$$(\kappa(E))^\omega = m^\omega = 2^\omega = (\kappa(\overline{\mathbb{N}}))^\omega .$$

Nach BESSAGA-PELCZYNSKI [4] folgt daraus die Isomorphierelation $c_0 \simeq c \simeq C(\overline{\mathbb{N}}) \simeq C(E)$.

Es sei nun Φ ein linearer Homöomorphismus von c_0 auf $C(E)$.

Dann ist für $R := \left\{ \text{Rest}_E a \mid a \in \mathcal{A}(K) \right\}$ die

Menge $\Phi^{-1}(R)$ ein abgeschlossener Teilraum von c_0 . Wir definieren eine stetige, lineare Abbildung

$$L: \Phi^{-1}(R) \longrightarrow \mathcal{A}(K) \text{ durch } L(g) := \widetilde{\Phi}(g) ,$$

wobei $\widetilde{\Phi}(g)$ die affine, stetige Fortsetzung von $\Phi(g)$ auf K bezeichnet. Nach LINDENSTRAUSS-PELCZYNSKI [8] (Satz 3. 1, Bemerkung 2) läßt sich L zu einem stetigen, linearen Operator $\widetilde{L}: c_0 \longrightarrow \mathcal{A}(K)$ fortsetzen. $\widetilde{L} \circ \Phi^{-1}$ ist dann eine stetige, lineare Surjektion von $C(E)$ auf $\mathcal{A}(K)$. Daraus folgt, daß $\mathcal{A}(K)$ Quotient von $C(E)$ ist, womit die Behauptung aus Proposition I.1.5 folgt.

Bemerkung:

Wie man leicht sieht, ist die Abbildung $\text{Rest}_E \circ \widetilde{L} \circ \Phi^{-1}$ im Beweis von I.2.4 eine Projektion von $C(E)$ auf $\text{Rest}_E \mathcal{A}(K)$.

I.2.5 Proposition:

Ist K ein kompaktes Simplex mit einer überabzählbaren, metrisierbaren Berandung E , so ist K eine M -Menge , und E ist eine starke Berandung von K .

Beweis:

auf Grund des Satzes von Milutin [12] ist $C(E)$ linear-homöomorph zu $C(\mathcal{L})$, wobei $\mathcal{L}$ die Cantor-Menge bezeichne. Außerdem existiert nach JOHNSON-ZIPPIN [6] eine stetige, lineare Surjektion von $C(\mathcal{L})$ auf $\mathcal{A}(K)$. $\mathcal{A}(K)$ ist also Quotient von $C(E)$. Unter Verwendung des Beweises von Proposition I.1.5 folgt daraus die Behauptung.

I.2.6 Lemma:

Es seien B ein Banach-Raum und S die Einheitskugel von B , versehen mit der $\mathcal{C}(B, B^*)$ -Topologie. Betrachten wir S als Teilmenge der Einheitskugel des Biduals B^{**} , so erfüllt $K:=S$ die Voraussetzungen von Proposition I.1.5.

Beweis:

S liegt dicht in der $\mathcal{C}(B^{**}, B^*)$ -kompakten Einheitskugel von B^{**} . Außerdem ist, wie wir zeigen werden, jede Funktion $a \in \mathcal{A}(S)$ gleichmäßig stetig: Es sei $f \in \mathcal{A}(S)$. Dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $f(\underline{0})=0$. Da für jedes $x \in S$ die Gleichung $f(x) = 2f(\frac{1}{2}x)$ gilt, reicht es nachzuweisen, daß $\text{Rest}(f)$ gleichmäßig stetig ist. Es sei $\epsilon > 0$; Dann existiert auf Grund der Stetigkeit von f im Punkt $\underline{0}$ eine schwache 0 -Umgebung V derart, daß $|f(V)| < \epsilon$. Liegen nun x und y in $\frac{1}{2}S$ und gilt $(x-y) \in V$, so erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= 2 \left| \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-y) \right| = 2 \left| f\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \right| = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} |f(x-y)| < \epsilon. \end{aligned}$$

$\text{Rest}(f)$ ist also gleichmäßig stetig.

I.2.7 Korollar:

Es sei B ein Banach-Raum derart, daß B^* Quotient eines Raumes $C(X)$ ist. Weiter besitze die Einheitskugel S von B - versehen mit der $\mathcal{C}(B, B^*)$ - Topologie - eine Berandung E und x_0 sei ein Punkt aus $(S \setminus E)$.

Dann ist S eine relativ-kompakte M -Menge und $(E \cup \{x_0\})$ ist eine starke Berandung von S , falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- 1) X und E sind überabzählbare metrische Räume.
- 2) X und E sind abzählbare metrische Räume mit $(\chi(E))^\omega = (\chi(X))^\omega$.

Beweis:

Wegen Lemma I.2.6 erfüllt S die Voraussetzung von Proposition I.1.5. Um die Behauptung von Korollar I.2.7 zu beweisen, brauchen wir also nur zeigen, daß $\mathcal{A}(\overline{S})$ Quotient von $C(E \cup \{x_0\})$ ist. In den oben angegebenen Fällen 1) und 2) sind wegen BESSAGA-PEŁCZYŃSKI [4] die Räume $C(E)$ und $C(X)$ isomorph zueinander. Da nach Voraussetzung B^* Quotient von $C(X)$ ist, existiert dann also eine stetige, lineare Surjektion L von $C(E)$ auf B^* . Da wir B^* mit

$$\left\{ f \in \mathcal{A}(\overline{S}) \mid f(Q) = 0 \right\} \quad \text{identifizieren können,}$$

erhalten wir also eine stetige, lineare Surjektion

$$\text{von } C(E) \text{ auf } \left\{ f \in \mathcal{A}(\overline{S}) \mid f(Q) = 0 \right\}. \text{ Dies hat die}$$

Existenz einer stetigen, linearen Surjektion von

$$C(E \cup \{x_0\}) = C(E) \oplus \text{VR}(1_{x_0}) \quad \text{auf } \mathcal{A}(\overline{S}) =$$

$$\left\{ f \in \mathcal{A}(\overline{S}) \mid f(Q) = 0 \right\} \oplus \text{VR}(1_{\overline{S}}) \quad \text{zur Folge.}$$

1.2.8 Lemma:

Voraussetzung: K_1 ist eine kompakte M -Menge mit einer starken Berandung E_1 . Außerdem ist K_1 eine kompakte, konvexe Teilmenge von K_1 mit Berandung E_1 derart, daß der von K_1 in $\mathcal{A}(K_1)$ aufgespannte Vektorraum schwach-abgeschlossen und $C(E_1)$ Quotient von $C(E_1)$ ist.

Behauptung: K_1 ist eine M -Menge, und E_1 ist eine starke Berandung von K_1 .

Beweis:

Wie man leicht sieht, brauchen wir nur nachzuweisen, daß $\mathcal{A}(K_1)$ Quotient von $\mathcal{A}(K_1)$ ist.

Zu diesem Zweck, zeigen wir, daß der durch $T(f) := \text{Rest}(f)_{K_1}$ definierte lineare Operator

$T: \mathcal{A}(K_1) \rightarrow \mathcal{A}(K_1)$ surjektiv ist. Da $T(\mathcal{A}(K_1))$ die Funktion 1_{K_1} enthält und die Punkte von K_1

trennt, liegt $T(\mathcal{A}(K_1))$ dicht in $\mathcal{A}(K_1)$. Da $T(\mathcal{A}(K_1))$ außerdem abgeschlossen ist, folgt aus der w^* -Abgeschlossenheit von $VK(K_1)$ und der Gleichung $T^*(\mathcal{A}(K_1)) = VK(K_1)$. Demzufolge ist T surjektiv.

1.2.9 Proposition:

Jede kompakte, konvexe Teilmenge eines jeden endlich-dimensionalen Vektorraumes ist eine M -Menge.

Beweis:

Es sei K eine kompakte, konvexe Teilmenge eines endlich-dimensionalen Raumes V , weiter sei $B \subset V$ ein Bauer-Simplex, welcher K enthält und höchstens genauso viele Extrempunkte wie K besitzt.

Wir setzen $m := |Ex(B)|$ und wählen m paarweise verschiedene Punkte $x_1, \dots, x_m$ aus $Ex(K)$. Dann seien Φ eine Bijektion von $Ex(B)$ auf $\{x_1, \dots, x_m\}$ und $\Phi_*: C(\{x_1, \dots, x_m\}) \rightarrow C(Ex(B))$ die durch Φ induzierte Abbildung. Infolge der Surjektivität der durch $\chi(f) := \Phi_* \left(\text{Rest}_{\{x_1, \dots, x_m\}}(f) \right)$ definierten Abbildung

$\chi: C(\overline{Ex(K)}) \rightarrow C(Ex(B))$ ist $C(Ex(B))$ Quotient

von $C(\overline{Ex(K)})$. Die Behauptung folgt mit Hilfe von Lemma I.2.8.

I.2.10 Lemma:

Ist K eine metrisierbare kompakte, konvexe Menge mit einer überabzählbaren Berandung E und ist $\mathcal{A}(K)$ isomorph zu einem Raum $C(X)$ mit überabzählbarem X , so ist K eine M -Menge, und E ist eine starke Berandung von K .

Beweis:

Nach unserer Voraussetzung für K ist $\mathcal{A}(K)$ und damit auch $C(X)$ separabel, woraus die Metrisierbarkeit von X folgt. Wegen des Satzes von Milutin erhalten wir dann die folgende Isomorphierelation: $C(E) \simeq C(X) \simeq \mathcal{A}(K)$. Demzufolge ist $\mathcal{A}(K)$ Quotient von $C(E)$.

I.2.11 Bemerkung:

- 1) Ist $\mathcal{A}(K)$ isometrisch - nicht nur isomorph - zu einem $C(X)$ -Raum, so ist K ein Simplex.
- 2) Aus der Isomorphie von $\mathcal{A}(K)$ zu einem $C(X)$ -Raum folgt i.a. nicht, daß K ein Simplex ist.

Bemerkung I.2.11 , 2) läßt sich mit Hilfe von Beispiel I.2.12 begründen, welches außerdem zeigt, daß Berandungen konvexer Mengen K i.a. kleiner als $\overline{\text{Ex}(K)}$ gewählt werden können.

I.2.12 Beispiel:

Wir konstruieren eine konvexe Menge S mit einer überabzählbaren Extremalpunktmenge $\text{Ex}(S)$ und einer in $\text{Ex}(S)$ enthaltenen, abzählbaren starken Berandung von S .

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ eine stetige Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$f_n\left(\frac{1}{n+2}\right) = 1 \quad \text{und}$$

$$f_n\left([0,1] \setminus \left[\frac{2n+5}{2(n+3)(n+2)}, \frac{2n+3}{2(n+2)(n+1)}\right]\right) = \{0\}.$$

Dann ist

$A := \overline{\text{VR}(\{1_{[0,1]}, \text{id}, \text{id}^2\} \cup \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})}$ ein zulässiger Teilraum von $C([0,1])$.

S sei der Zustandsraum von A und ψ die kanonische Abbildung von $[0,1]$ in S .

Wie wir sehen, gilt $\psi_n(A) = [0,1]$, also

$$\psi([0,1]) = \text{Ex}(S).$$

Aus Lemma I.2.13 folgt dann, daß $E := \left\{ \psi\left(\frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{\psi(0)\}$ eine starke Berandung von S ist.

I.2.13 Lemma:

Es seien S und E wie in Beispiel I.2.12 definiert.

Dann ist die Abbildung $\text{Kest} : \mathcal{A}(S) \xrightarrow{E} C(E)$ eine Isomorphie.

Beweis:

Es reicht zu zeigen, daß die durch

$\Phi(a) := (a(\frac{1}{i}))_{i \in \mathbb{N}}$ definierte Abbildung

$\Phi: A \rightarrow c$ ein Isomorphismus ist. Wir stellen zunächst fest, daß

$$A = \overline{\text{VR}(\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})} \oplus \text{VR}(\{1_0, \frac{1}{1}, \text{id}, \text{id}^2\}) .$$

Es seien p_1 und p_2 die stetigen, linearen Projektionen von A auf $\text{VR}(\{1_0, \frac{1}{1}, \text{id}, \text{id}^2\})$ bzw.

auf $\overline{\text{VR}(\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})}$. Zum Nachweis der Injektivität von Φ nehmen wir an, daß $\Phi(a) = \underline{0}$.

Dann gilt $a(\frac{1}{i}) = 0$ und damit $(p_1(a) + p_2(a))(\frac{1}{i}) = 0$

für jedes $i \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_{i \rightarrow \infty} p_2(a) = 0$ erhalten

wir also $(p_1(a))(0) = 0$ und $(p_1(a))(\frac{1}{i}) = 0$

für $i = 1, 2$, was die Gleichung $p_1(a) = \underline{0}$ zur Folge hat. Deshalb gilt $(p_2(a))(\frac{1}{i}) = 0$ für alle

$i \in \mathbb{N}$ und weiter: $p_2(a) = \underline{0}$, also $a = p_1(a) + p_2(a) =$

$= \underline{0}$. Daraus ergibt sich die Injektivität von Φ , wobei wir beachten müssen, daß Φ linear ist.

Die Surjektivität von Φ weist man folgendermaßen nach: Es seien $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \in c$ und $\alpha := \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i$.

Dann liegt für $\lambda'_i := (\lambda_i - \alpha)$ die Folge $(\lambda'_i)_{i \in \mathbb{N}}$

in c_0 . Es gibt ein $m \in \text{VR}(\{\text{id}, \text{id}^2\})$ mit

$m(1) = \lambda'_1$ und $m(\frac{1}{2}) = \lambda'_2$. Setzen wir

$y_i := (\lambda'_i - m(\frac{1}{i}))$, so liegt $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in c_0 ,

und es gilt $y'_1 = y'_2 = 0$.

Es existiert ein $b \in \overline{\text{VR}(\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})}$ mit $b(\frac{1}{i}) = \gamma_i$

für jedes $i \in \mathbb{N}$. Wir sehen, daß $b + \alpha + m$ in A enthalten ist und für $i \in \mathbb{N}$ der folgenden Gleichung genügt:

$$(b + \alpha + m)(\frac{1}{i}) = \gamma_i + \alpha + m(\frac{1}{i}) = \gamma_i - m(\frac{1}{i}) + m(\frac{1}{i}) = \lambda_i.$$

ϕ ist also eine stetige lineare Bijektion von A auf c und somit eine Isomorphie.

Wir erinnern daran, daß $A(K)$ in dieser Arbeit den mit der sup-Norm versehenen Raum aller affinen, beschränkten Funktionen auf K bezeichnet.

I.3.1 Proposition:

Es sei K eine kompakte M -Menge mit einer starken Berandung E . Weiter existiere eine Isomorphie ϕ von $C(E)$ auf den Dualraum V^* eines Banachraumes V derart, daß

$$\left\{ \phi(f) \mid f \in C(E), \tilde{f} = 0 \right\} \text{ w-abgeschlossen ist,}$$

wobei $\tilde{f}$ wie in I.1.8 definiert sei..

Dann existiert eine stetige Projektion von $A(K)$ auf $\mathcal{A}(K)$.

Beweis:

Wir setzen $N := \{f \in C(E) \mid \tilde{f} = 0\}$. Da E eine starke Berandung von K ist, erhalten wir unter Aus-

nutzung der schwachen Abgeschlossenheit von $\phi(N)$ die folgenden Isomorphierelationen:

$$\mathcal{A}(K) \cong C(E)/N \cong V^*/\phi(N) \cong V^*/\phi(N)^{\perp\perp} \cong (\phi(N)^{\perp})^*$$

Da $B := (\phi(N)^{\perp})^*$ komplementiert in B^{**} und $\mathcal{A}(K)$ isomorph zu B ist, folgt also, daß $\mathcal{A}(K)$ in $\mathcal{A}(K)^{**}$ komplementiert ist.

wir werden nun die Existenz einer Isometrie von $A(K)$ auf $\mathcal{A}(K)^{**}$ nachweisen:
Für jedes $b \in A(K)$ ist durch

$$\tilde{b}(\alpha \delta_{k_1}^A - \beta \delta_{k_2}^A) := \alpha b(k_1) - \beta b(k_2) \text{ ein lineares}$$

Funktional auf $\mathcal{A}(K)$ definiert. Wegen $\sup_{x \in K} |b(x)| < \infty$

und der Gleichung $(\mathcal{A}(K))_1 = \text{konvh}(\{\delta_k^A | k \in K\}, \{\tilde{\delta}_k^A | k \in K\})$

folgt, daß $\tilde{b}$ ein auf $(\mathcal{A}(K))_1$ beschränktes, zu b

isometrisches lineares Funktional ist, daß also insbesondere $\tilde{b}$ in $\mathcal{A}(K)^{**}$ liegt.

Die durch $\psi(b) := \tilde{b}$ definierte Abbildung $\psi: A(K) \rightarrow \mathcal{A}(K)^{**}$ ist demzufolge eine lineare Isometrie. Die Surjektivität von ψ erhält man folgendermaßen: Es sei $l \in \mathcal{A}(K)^{**}$. Dann gilt für

das durch $a(k) := l(\delta_k^A)$ definierte Element a

aus $A(K)$: $\psi(a) = l$. Auf Grund unserer Vorüberlegung ist also $\mathcal{A}(K)$ in $A(K)$ komplementiert.

I.3.2 Lemma:

K sei eine den in Lemma I.2.10 angegebenen Voraussetzungen genügende M -Menge. Dann existiert eine zur sup-Norm äquivalente Norm $\|\cdot\|_0$ auf $A(K)$, für welche die folgende Bedingung erfüllt ist:
Für jedes $f \in A(K)$ existiert ein $a \in \mathcal{A}(K)$ derart, daß $\|f - a\|_0 = \inf \{ \|f - b\|_0 \mid b \in \mathcal{A}(K) \}$ gilt.

Beweis:

Es sei χ ein Isomorphismus von $C(X)$ auf $A(K)$.

Dann gibt es eine zur sup-Norm äquivalente

Norm $\|\cdot\|_1$ auf $A(K)$, für die χ eine Isometrie

von $C(X)$ auf $A(K)$ und χ^* eine Isometrie von

$C(X)^{**}$ auf $A(K)^{**}$ ist. Nach HOLMES-WARD [5]

existiert zu jedem $l \in C(X)^{**}$ ein $g \in C(X)$, so daß

$$\|1 - \tilde{g}\| = \inf \left\{ \|1 - \tilde{m}\| \mid m \in C(X) \right\},$$

wobei $\tilde{g}$ das kanonische Bild von g in $C(X)^{**}$ und

$\|\cdot\|$ die übliche Norm auf $C(X)^{**}$ bezeichnen.

Da χ^* isometrisch ist, existiert also zu

jedem $a \in A(K)^{**}$ ein $b \in A(K)$ derart, daß

$$\|a - \bar{b}\|_1 = \inf \left\{ \|a - \bar{c}\|_1 \mid c \in A(K) \right\} .$$

Dabei bezeichne $\bar{b}$ das kanonische Bild von b

in $A(K)^{**}$ und $\|\cdot\|_1$ die übliche Norm von $(A(K), \|\cdot\|_1)^{**}$

Wie aus dem Beweis von Proposition I.3.1 her-

vorgeht, gibt es eine Isometrie ψ von $A(K)$ auf

$A(K)^{**}$.

Man sieht, daß die Behauptung folgt, wenn man

$\|\cdot\|_0$ als die Norm auf $A(K)$ definiert, welche der

Norm $\|\cdot\|_1$ bezüglich der Abbildung ψ entspricht.

An dieser Stelle weisen wir auf den Begriff der Repräsentation von Punkten durch Maße hin. Ein Punkt $k \in K$ wird durch ein Maß $\nu \in \mathcal{M}(K)$ repräsentiert, wenn die Gleichung $\int a \, d\nu = a(k)$ für jedes $a \in \mathcal{A}(K)$ erfüllt ist. Weiter sei erwähnt, daß gemäß unserer Voraussetzung solch ein Maß nicht notwendig positiv ist. Wie wir schon wissen, sind die Maße μ_k , die in der Definition der starken Berandung (I.1.8) vorkommen, im allgemeinen keine repräsentierenden Maße. Statt dessen erhalten wir folgendes Resultat:

I.3.3 Satz:

Es sei K eine metrisierbare, kompakte M -Menge mit einer überabzählbaren starken Berandung E von K , außerdem sei $\mathcal{A}(K)$ nicht-separabel.

Dann existieren ein zu $C(K)$ isomorpher Teilraum A von $\mathcal{A}(K)$ und eine stetige, affine Abbildung $\mu: K \longrightarrow \mathcal{M}(E)$ derart, daß für jedes $a \in A$ und $k \in K$ die Gleichung

$$a(k) = \int_E a \, d\mu_k \quad \text{gilt.}$$

Beweis:

1) K ist eine M -Menge mit starker Berandung E . Deshalb ergibt sich aus Proposition I.1.5 die Existenz einer stetigen, linearen Surjektion $T: C(E) \longrightarrow \mathcal{A}(K)$.

$T^*(\mathcal{A}^*(K))$ ist norm-abgeschlossen in $C^*(E)$,
 und T^* ist eine stetige Bijektion von $\mathcal{S}^*(K)$
 auf $T^*(\mathcal{A}^*(K))$. Demzufolge sind $\mathcal{S}^*(K)$ und
 $T^*(\mathcal{A}^*(K))$ isomorph zueinander, weshalb $T^*(\mathcal{S}^*(K))$
 mit $\mathcal{A}^*(K)$ nicht separabel ist. Nach ROSENTHAL [11]
 erhalten wir dann die Existenz eines Unter-
 raumes Y von $C(E)$ mit den folgenden Eigen-
 schaften:

$\alpha)$ Rest T_Y ist ein Isomorphismus.

$\beta)$ $Y \simeq C(E) \simeq C(K)$

Da E Berandung von K ist, existiert also ein
 zu $C(K)$ isomorpher Teilraum von Rest $(\mathcal{A}(K))_E$.

Nach PELCZYNSKI [9] gibt es dann einen zu
 $C(K)$ isomorphen Teilraum A von $\mathcal{A}(K)$, für den
 Rest $(A)_E$ in $C(E)$ komplementiert ist.

2) Es sei nun $P: C(E) \longrightarrow \text{Rest}(A)_E$ eine stetige

lineare Projektion.

Für jedes $k \in K$ definieren wir:

$$\mu_k := P^*((\text{Rest})_E^*(\mathcal{S}_k^A)) \quad .$$

Dann ist μ stetig und affin, und wir erhalten
 für jedes $a \in A$ und $k \in K$ die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_E a \, d\mu_k &= \left[\tilde{P}((\text{Rest})_E^*(\mathcal{S}_k^A)) \right] (\text{Rest } a)_E = \\ &= \left[(\text{Rest})_E^*(\mathcal{S}_k^A) \right] (P(\text{Rest } a)) = \left[(\text{Rest})_E^*(\mathcal{S}_k^A) \right] (\text{Rest } a)_E \\ &= a(k) \quad . \end{aligned}$$

I.3.4 Korollar:

Es sei K eine metrisierbare kompakte, konvexe Menge mit einer überabzählbaren Berandung E . Außerdem sei $\mathcal{A}(K)$ isomorph zu einem Raum $C(X)$ mit überabzählbarem X .

Dann existieren ein Isomorphismus $T: \mathcal{A}(K) \rightarrow \mathcal{A}(K)$ von $\mathcal{A}(K)$ auf den Teilraum $T(\mathcal{A}(K))$ und eine stetige, affine Abbildung $\mu: K \rightarrow \mathcal{M}(E)$ derart, daß für alle $k \in K$ und $a \in T(\mathcal{A}(K))$ die Gleichung

$$a(k) = \int_E a \, d\mu_k \quad \text{gilt.}$$

Beweis:

Auf Grund der Isomorphierelation $\mathcal{A}(K) \simeq C(X)$ ist $\mathcal{A}(K)$ nicht separabel. Wegen Lemma I.2.10 sind dann die Voraussetzungen von Satz I.3.3 erfüllt. Demnach gibt es einen zu $C(K)$ und damit - wegen des Satzes von Milutin - zu $\mathcal{A}(K)$ isomorphen Teilraum A von $\mathcal{A}(K)$, für den die Integralformel von Satz I.3.3 gilt.

I.3.5 Bemerkung:

Satz I.3.3 und Korollar I.3.4 bleiben richtig, wenn man für K an Stelle der Kompaktheit voraussetzt, daß K relativ-kompakt und jedes $a \in \mathcal{A}(K)$ gleichmäßig stetig ist.

Die im Anschluß an den Beweis von I.2.4 gemachte Bemerkung und der zweite Teil des Beweises von I.3.3 führen zu folgendem Ergebnis.

I.3.6 Proposition:

Ist K ein metrisierbares, kompaktes Simplex mit einer abzählbaren Berandung E , für die $\chi(E) \in \mathbb{N}$ gilt, so existiert eine stetige, affine Abbildung $\mu: K \rightarrow \mathcal{M}(E)$ derart, daß für jedes $k \in K$ das Maß μ_k den Punkt k repräsentiert.

Wir werden nun diejenigen konvexen Mengen K mit einer abzählbaren Berandung E und $\chi(E) \in \mathbb{N}$ charakterisieren, für die wie im obigen Fall eine stetige, affine Auswahl darstellender Maße existiert.

I.3.7 Proposition:

Es sei K eine metrisierbare, konvexe Menge mit einer abzählbaren Berandung E für die $\chi(E) \in \mathbb{N}$ gilt; außerdem sei $\dim(\mathcal{A}(K)) \notin \mathbb{N}$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- 1) Es existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und eine stetige, affine Abbildung $\alpha: K \rightarrow \mathcal{M}_n(E)$ derart, daß für jedes $k \in K$ das Maß α_k den Punkt k repräsentiert.
- 2) $\mathcal{A}(K)$ ist isomorph zu c_0 .

Beweis:

1) $\implies$ 2): Es sei $\mu: K \rightarrow \mathcal{M}(E)$ eine stetige, affine Auswahl darstellender Maße. Dann ist der

durch $L(f)(e) = \int f d\mu_e$ definierte lineare

Operator $L: C(E) \rightarrow C(E)$ eine Projektion von $C(E)$ auf $\left\{ \text{Rest } a \mid a \in \mathcal{A}(K) \right\}$. Da $C(E)$ zu c_0 isomorph, und jeder unendlich-dimensionale, komplementierte Teilraum von c_0 wegen [10] isomorph zu c_0 ist, muß folglich auch $\mathcal{A}(K)$ zu c_0 isomorph sein.

2) $\implies$ 1): Es sei Φ eine Isomorphie von $C(E)$ auf c_0 . Dann ist nach Voraussetzung

$\Phi\left(\left\{\text{Rest}_E a \mid a \in \mathcal{A}(K)\right\}\right)$ ein zu c_0 isomorpher

Teilraum von c_0 . Infolgedessen ist wegen [10]

$\Phi\left(\left\{\text{Rest}_E a \mid a \in \mathcal{A}(K)\right\}\right)$ in c_0 komplementiert, und damit ist auch $\left\{\text{Rest}_E a \mid a \in \mathcal{A}(K)\right\}$ in $C(E)$ komplementiert. Die Behauptung ergibt sich dann in Analogie zum zweiten Teil des Beweises von Satz I.3.3.

I.3.8 Bemerkung:

Die in Beispiel I.2.12 konstruierte konvexe Menge ist kein Simplex und besitzt eine stetige, affine Auswahl darstellender Maße. Diese darstellenden Maße sind nicht notwendig positiv. Für positive darstellende Maße gilt dagegen:

I.3.9 Proposition:

Es seien K eine kompakte, konvexe Menge und E eine Berandung von K . Existiert eine stetige, affine Abbildung $\mu: K \rightarrow \mathcal{M}(E)$ derart, daß für jedes $k \in K$ das Maß μ_k positiv ist und den Punkt k repräsentiert, so ist K ein Bauer-Simplex.

Beweis:

Der durch $L(f)(k) := \int_E \text{Rest}(f) d\mu_k$ definierte

lineare Operator $L: C(K) \rightarrow C(K)$ ist eine positive Projektion von $C(K)$ auf $\mathcal{A}(K)$ mit $\|L\| = 1$. Deshalb ist $\mathcal{A}(K)$ ein Verband, woraus die Behauptung folgt.

II. M-Mengen Approximation für $\mathcal{A}(K)$.

In diesem Kapitel zeigen wir, daß sich jede metrisierbare, kompakte, konvexe Menge in gewissem Sinn durch M-Mengen approximieren läßt.

II.1 Satz:

Es sei K eine metrisierbare, kompakte, konvexe Menge, für die $\mathcal{A}^*(K)$ nicht separabel ist.

Dann existiert eine bezüglich der Teilmengenrelation gerichtete Familie $(B_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ zulässiger Teilräume B_γ von $C(K)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- 1) $\mathcal{A}(K) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$
- 2) $\text{Ex}(K) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \partial_{\mathcal{A}}(B_\gamma)$
- 3) Für jedes $\gamma \in \Gamma$ ist der Zustandsraum von B_γ eine M-Menge, welche den Voraussetzungen von Korollar I.3.4 genügt.

Außerdem existiert eine aufsteigend-gefilterte Familie $(K_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ von Teilmengen K_γ von K so daß für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt:

$\partial_{\mathcal{A}}(B_\gamma) \subset \{x \in K \mid x \text{ ist } K_\gamma\text{-extremal}\}$, wobei $k \in K$ K_γ -extremal heißt, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

Für alle $x \in K$, $y \in K_\gamma$, $\lambda \in]0,1[$ mit $k = \lambda x + (1-\lambda)y$ gilt: $k = x = y$.

Der Beweis von Satz II.1 beruht auf einem Ergebnis, das vielleicht auch für sich selbst betrachtet von Interesse ist. Zur Formulierung dieses Resultates benötigen wir die folgende Definition.

II.2 Definition:

Es seien K eine konvexe Menge und K' eine Teilmenge von K . Eine Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ heißt genau dann K' -affin, wenn für alle $x \in K, y \in K'$ und $\lambda \in [0, 1]$ die Gleichung $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ gilt.

II.3 Satz:

Es sei K eine metrisierbare kompakte, konvexe Menge, für die $\overline{\text{Ex}(K)}$ überabzählbar und $\mathcal{A}(K)$ nicht separabel ist. Dann gibt es eine durch die Teilmengenrelation gerichtete Familie $(K_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ konvexer Teilmengen K_γ von K , und für jedes $k \in K$ gibt es eine Familie $(\mu_k^\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ in $\mathcal{M}(\overline{\text{Ex}(K)})$ mit den folgenden Eigenschaften:

- 1) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma = K$
- 2) Für jedes $\gamma \in \Gamma$ und $f \in C(\overline{\text{Ex}(K)})$ ist die durch $a_f^\gamma(k) := \int_{\overline{\text{Ex}(K)}} f \, d\mu_k^\gamma$ definierte Funktion $a_f^\gamma: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und K_γ -affin.
- 3) Für jedes $\gamma \in \Gamma$ und jede stetige, K_γ -affine Funktion a auf K gibt es genau ein $f \in C(\overline{\text{Ex}(K)})$ mit $a_f^\gamma = a$.

In den folgenden zum Beweis von Satz II.3 erforderlichen Hilfssätzen sei K wie in der Voraussetzung von Satz II.3 gewählt.

weiter sei Γ das System der endlichen Teilmengen von K ; außerdem definieren wir für jedes $\gamma \in \Gamma$ die Mengen K_γ und A_γ durch

$$K_\gamma := \text{konvh}(\gamma) \quad \text{und}$$

$$A_\gamma := \left\{ f \in C(K) \mid f \text{ ist } K_\gamma\text{-affin} \right\}.$$

Für die Hilfssätze Lemma II.4 bis II. 6 wählen wir $\nu \in \mathbb{N}$ und $e_1, \dots, e_\nu \in K$ und setzen

$$\gamma_\nu := \{e_1, \dots, e_\nu\}.$$

II.4 Lemma:

Es existiert ein linearer Fortsetzungsoperator ψ_{γ_ν} von $\mathcal{A}(K_{\gamma_\nu})$ in A_{γ_ν} .

Beweis:

$\text{Vh}(\{e_1, \dots, e_\nu\})$ ist ein endlich-dimensionaler Teilraum von F (wobei F ein K enthaltender, lokal-konvexer topologischer Vektorraum ist). Es sei P eine stetige Projektion von F auf $\text{Vh}(\{e_1, \dots, e_\nu\})$.

Wir definieren $\psi_{\gamma_\nu} : \mathcal{A}(K_{\gamma_\nu}) \longrightarrow A_{\gamma_\nu}$ durch

$$\psi_{\gamma_\nu}(a) := \underset{K}{\text{Rest}}(\tilde{a} \cdot P) \quad , \text{ wobei } \tilde{a} \text{ die affine}$$

Fortsetzung von a auf $\text{Vh}(\{e_1, \dots, e_\nu\})$ bezeichnet.

ψ_{γ_ν} ist linear und stetig, und für jedes $a \in \mathcal{A}(K_{\gamma_\nu})$ und $x \in K_{\gamma_\nu}$ erhalten wir :

$$\begin{aligned} (\underset{K_{\gamma_\nu}}{\text{Rest}}(\psi_{\gamma_\nu}(a)))(x) &= (\psi_{\gamma_\nu}(a))(x) = (\underset{K}{\text{Rest}}(\tilde{a} \cdot P))(x) = \\ &= (\tilde{a} \cdot P)(x) = \tilde{a}(P(x)) = \tilde{a}(x) = a(x) , \end{aligned}$$

womit nachgewiesen ist, daß $\underset{K_{\gamma_\nu}}{\text{Rest}}(\psi_{\gamma_\nu}(a)) = a$ gilt.

II.5 Lemma:

Es sei $\psi_{K'}: A(K') \rightarrow A_{K'}$ ein linearer Fort-

setzungsoperator. Dann ist die durch

$\chi_{K'}(b) := \psi_{K'}(\text{Rest}(b))$ definierte Abbildung

$\chi_{K'}: A_{K'} \rightarrow \psi_{K'}(A(K'))$ eine stetige

Projektion von $A_{K'}$ auf $\psi_{K'}(A(K'))$.

Beweis:

$\chi_{K'}$ ist stetig und linear. Wir zeigen nun, daß

$\chi_{K'}$ surjektiv ist: Es sei $x \in \psi_{K'}(A(K'))$.

Dann gibt es eine Funktion $a \in A(K_1)$, für die

$x = \psi_{K_1}(a) = \psi_{K_1}(\text{Rest}(\psi_{K_1}(a))) = \chi_{K_1}(\psi_{K_1}(a))$ gilt.

Auf Grund der folgenden Gleichungen ist χ_{K_1}

eine Projektion:

$$\chi_{K_1}(\chi_{K_1}(b)) = \chi_{K_1}(\psi_{K_1}(\text{Rest}(b))) = \chi_{K_1}(\text{Rest}(\psi_{K_1}(\text{Rest}(b)))) =$$

$$= \psi_{K_1}(\text{Rest } b) = \chi_{K_1}(b) .$$

II.6 Lemma:

Es sei $\chi_{K'}$ definiert wie in Lemma II.5 .

Dann ist der Kern von $\chi_{K'}$ ein separabler G-Raum.

Beweis:

wir beginnen mit einer kurzen Bemerkung:

$$\left\{ f \in C(K) \mid \text{Rest } f = 0, f \in A_{K'} \right\} =$$

$$= \left\{ f \in C(K) \mid \text{Rest } f = 0, f \text{ ist } \{e_1, \dots, e_p\} \text{- affin} \right\} .$$

Zum Beweis dieser Gleichung ist im wesentlichen nur zu zeigen, daß f in A_{λ} liegt, falls $\text{Rest } f = 0$
 K_1

und $f \{e_1, \dots, e_n\}$ -affin ist, und dies weist man

durch eine vollständige Induktion nach, welche gemäß der folgenden Skizze verläuft:

Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1}) &= \\ &= \lambda f(x) + \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_{n-1} f(e_{n-1}) \text{ für} \\ \lambda, \dots, \lambda_{n-1} \geq 0 \text{ mit } \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i &= 1. \end{aligned}$$

Induktion:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \dots + \lambda_n e_n) &= \\ &= f((1-\lambda_n) \cdot (\frac{\lambda}{1-\lambda_n} x + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} e_{n-1}) + \lambda_n e_n) = \\ &= (1-\lambda_n) \cdot f(\frac{\lambda}{1-\lambda_n} x + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} e_{n-1}) + \lambda_n f(e_n) = \\ &= \lambda f(x) + \dots + \lambda_n f(e_n). \end{aligned}$$

Wir werden nun eine Familie $(x_\alpha, y_\alpha, \lambda_\alpha)_{\alpha \in J}$ von

Punkten $(x_\alpha, y_\alpha, \lambda_\alpha) \in (K \times K \times \mathbb{R})$ so definieren,

daß $\text{Kern}(\chi_\lambda) = \left\{ f \in C(K) \mid f(x_\alpha) = \lambda_\alpha f(y_\alpha) \text{ für jedes } \alpha \in J \right\}$

gilt. Wir führen hier zwei neue Bezeichnungen ein :

$\Delta := \{(k, k) \mid k \in K\}$ und für $x, y \in K$:

$$[x, y] := \left\{ \lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0, 1] \right\}.$$

Für jedes Tupel $(x, e_i) \in (K \times \{e_1, \dots, e_v\}) \setminus \Delta$ existiert genau ein den folgenden zwei Bedingungen genügender Punkt $q(x, e_i) \in K$:

- 1) $x \in [e_i, q(x, e_i)]$.
- 2) Wenn $y = (1-\lambda)e_i + \lambda q(x, e_i)$ und $\lambda > 1$, dann gilt $y \notin K$.

Jedes $z \in [e_i, q(x, e_i)]$ kann man auf genau eine Weise in der Form $z = (1-\lambda)e_i + \lambda q(x, e_i)$ darstellen.

Infolgedessen gibt es zu jedem $(x, e_i) \in (K \times \{e_1, \dots, e_v\}) \setminus \Delta$ genau ein $\lambda_{(x, e_i)} \in [0, 1]$ derart, daß $x = (1-\lambda_{(x, e_i)})e_i + \lambda_{(x, e_i)}q(x, e_i)$. Wir setzen $\mathcal{J} := (K \times \{e_1, \dots, e_v\})$.

Dann ordnet die durch

$$\eta((x, e_i)) := \begin{cases} (x, q(x, e_i), \lambda_{(x, e_i)}) & , \text{ falls } x \neq e_i \\ (e_i, e_i, 0) & , \text{ falls } x = e_i \end{cases}$$

definierte Abbildung $\eta: \mathcal{J} \longrightarrow (K \times K \times \mathbb{R})$ jedem $\alpha \in \mathcal{J}$ genau ein Tripel $(x_\alpha, y_\alpha, \lambda_\alpha) \in (K \times K \times \mathbb{R})$ zu.

Die Gleichung

$$\text{Kern}(\chi_i) = \left\{ f \in C(K) \mid f(x_\alpha) = \lambda_\alpha f(y_\alpha) \text{ für alle } \alpha \in \mathcal{J} \right\}$$

ergibt sich aus der Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- 1) $f \in \text{Kern}(\chi_{y_i})$.
- 2) $f \in A_{K_i}$ und $\psi_{y_i}(\text{Rest } f) = 0$.
- 3) $f \in A_{K_i}$ und $\text{Rest } f = 0$.

- 4) Für jedes $i \in \{1, \dots, \nu\}$ gilt $f(e_i) = 0$, und
für $i \in \{1, \dots, \nu\}$, $x \in (K \setminus \{e_i\})$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt:
 $f(\lambda x + (1-\lambda)e_i) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(e_i)$.
- 5) Für jedes $i \in \{1, \dots, \nu\}$ gilt $f(e_i) = 0$, und
für $i \in \{1, \dots, \nu\}$, $x \in (K \setminus \{e_i\})$:
 $f((1-\lambda_{(x, e_i)}) e_i + \lambda_{(x, e_i)} q(x, e_i)) =$
 $= (1-\lambda_{(x, e_i)}) f(e_i) + \lambda_{(x, e_i)} f(q(x, e_i))$.
- 6) Für jedes $i \in \{1, \dots, \nu\}$, $x \in (K \setminus \{e_i\})$ gilt:
 $f(e_i) = 0$ und $f(x) = \lambda_{(x, e_i)} f(q(x, e_i))$.
- 7) Für jedes $\alpha \in J$ gilt:
 $f(x_\alpha) = \lambda_\alpha f(y_\alpha)$

Aus der Metrisierbarkeit von K folgt, daß
 $C(K)$ und damit auch Kern (χ_α) separabel ist.

Damit ist die Behauptung von Lemma II.6 be-
wiesen.

II.7 Beweis von Satz II.3 :

Wir können davon ausgehen, daß Kern $(\chi_{K_n}) \neq \{0\}$;

denn andernfalls erhielten wir für jedes
 $a \in \mathcal{F}(K)$ mit Rest $a = 0$ $\text{mod } K_j$, daß $a = 0$ gilt.

Dann wäre K Teilmenge eines endlich- dimensiona-
len Vektorraumes im Widerspruch zu unserer Vor-
aussetzung. Nach BENYAMINI [3] existiert ein
metrisierbarer kompakter Raum Z derart, daß
Kern $(\chi_j) \simeq C(Z)$.

Es ergibt sich also die folgende Isomorphie-
relation:

$$\begin{aligned} A_{\gamma_c} &= \text{Kern}(\chi_{\gamma_c}) \oplus \text{Im}(\chi_{\gamma_c}) = \text{Kern}(\chi_{\gamma_c}) \oplus \psi_{\gamma_c}(\mathfrak{A}(K_{\gamma_c})) \simeq \\ &\simeq \text{Kern}(\chi_{\gamma_c}) \oplus \mathbb{R}^{\nu} \simeq C(Z) \oplus C(\{1, \dots, \nu\}) \simeq \\ &\simeq C(Z \cup \{1, \dots, \nu\}) . \end{aligned}$$

Gemäß unserer Voraussetzung sind $\mathfrak{A}^*(K)$ und
damit auch $A_{\gamma_c}^*$ und $C(Z \cup \{1, \dots, \nu\})^*$ nicht se-
parabel. Infolgedessen erhalten wir mit Hilfe
des Satzes von Milutin, daß A_{γ_c} zu $C(\overline{\text{Ex}(K)})$

isomorph ist. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ sei nun ϕ_γ ein

Isomorphismus von $C(\overline{\text{Ex}(K)})$ auf A_γ . Dann folgt

die Aussage von Satz II.3, wenn wir für $\gamma \in \Gamma$
und $k \in K$ das Maß μ_k^γ durch $\mu_k^\gamma := \phi_\gamma^*(\delta_k^A)$

definieren; denn wir erhalten in diesem Fall
die folgende Gleichung:

$$\int_{\overline{\text{Ex}(K)}} f \, d\mu_k^\gamma = \phi_\gamma^*(\delta_k^A)(f) = (\phi_\gamma(f))(k) .$$

Wir sind jetzt in der Lage Satz II.1 zu be-
weisen:

II.8 Beweis von Satz II. 1 :

Wir definieren Γ und A_γ wie im Beweis zu

Satz II. 3 und setzen für $\gamma \in \Gamma$: $B_\gamma := A_\gamma$.

Zu 1) : Nehmen wir an, daß $f \in \bigcap_{y \in \Gamma} A_y$, $x, y \in K$

und $\lambda \in [0, 1]$:

Dann existiert ein $y_0 \in \Gamma$ derart, daß $x, y \in K_{y_0}$.

Da $f \in A_{y_0}$, gilt:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) .$$

f liegt also in $\mathcal{A}(K)$.

Zu 2) : Es sei $x \in (K \setminus \text{Ex}(K))$. Dann existieren k_1 und $k_2 \in K$, $\lambda \in]0, 1[$ und $y \in \Gamma$ derart, daß

$$x, k_1, k_2 \in K_y \text{ und } x = \lambda k_1 + (1-\lambda)k_2 . \text{ Daraus folgt:}$$

$x \notin \mathcal{D}_{\text{ex}}(A_y)$. Deshalb erhalten wir:

$$\bigcap_{y \in \Gamma} \mathcal{D}_{\text{ex}}(B_y) \subset \text{Ex}(K) , \text{ und weiter}$$

$$\text{Ex}(K) \subset \bigcap_{y \in \Gamma} \mathcal{D}_{\text{ex}}(B_y) , \text{ da } \text{Ex}(K) \text{ für jedes}$$

$y \in \Gamma$ in $\mathcal{D}_{\text{ex}}(B_y)$ enthalten ist.

Zu 3) : Für $y \in \Gamma$ sei S_y der Zustandsraum von B_y . Aus $\overline{\mathcal{D}_{\text{ex}}(B_y)} > \overline{\text{Ex}(K)}$ ergibt sich, daß $\overline{\text{Ex}(S_y)}$ eine metrisierbare, überabzählbare Berandung von S_y ist. Ferner erhalten wir die folgende Isomorphierelation:

$$\mathcal{A}(S_y) \simeq B_y \simeq \mathcal{C}(\overline{\mathcal{D}_{\text{ex}}(B_y)}) \simeq \mathcal{C}(\overline{\text{Ex}(S_y)}) .$$

Die Behauptung folgt dann mit Hilfe von Proposition I.1.5 .

III. Anwendungen auf die Isomorphietheorie von Banachräumen.

Um ein Ergebnis des vorhergehenden Kapitels auf die Banachraum-Theorie anwenden zu können, werden wir hier zeigen, daß jeder Banachraum zu einem $\mathfrak{A}(K)$ -Raum isomorph ist. Dieses Resultat erhielt bereits BEHREND'S [2] durch Anwendung einer anderen Beweismethode.

III.1 Satz:

Zu jedem Banachraum B existiert eine kompakte, konvexe Menge K derart, daß B isomorph zu $\mathfrak{A}(K)$ ist.

Wir beweisen Satz III.1 mit Hilfe des folgenden Lemmas:

III.2 Lemma:

Ist K eine kompakte, konvexe Menge, und ist B ein nicht - trivialer, abgeschlossener, linearer Teilraum von $\mathfrak{A}(K)$, so existiert eine kompakte konvexe Menge K' derart, daß B isomorph zu $\mathfrak{A}(K')$ ist.

Beweis:

Wir nehmen zunächst an, daß B ein 1_K enthaltender, abgeschlossener, linearer Teilraum von $\mathfrak{A}(K)$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, daß K in einen lokal-konvexen topologischen Vektorraum E regulär eingebettet ist. Wir definieren:

$$H := \left\{ x \in E \mid b(x) = 0 \text{ für jedes } b \in B \right\}.$$

Da für jedes $b \in B$ die Menge $b^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen ist, folgt aus $H = \bigcap_{b \in B} b^{-1}(\{0\})$ die Abgeschlossenheit von H . Der Quotienten-Raum E/H sei mit der Quotiententopologie versehen. Da dann die kanonische Surjektion $\phi : E \rightarrow E/H$ stetig ist, erhalten wir, daß $\phi(K)$ kompakt ist. Aus der folgenden Gleichung ist zu ersehen, daß $\phi(K)$ konvex ist.

$$\begin{aligned} \lambda(x + H) + (1-\lambda)(y + H) &= \\ = (\lambda x + (1-\lambda)y) + H. \end{aligned}$$

Wir definieren jetzt die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : B &\rightarrow \mathcal{A}(\phi(K)) \quad \text{durch} \\ (\psi(b))(k + H) &:= b(k). \end{aligned}$$

Für $b \in B$ ist $\psi(b)$ wohldefiniert, da aus $(k_1 + H) = (k_2 + H)$ folgt, daß $b(k_1) = b(k_2)$ für alle $b \in B$ gilt.

$$\begin{aligned} \psi(b) \text{ ist affin; denn für } k_1, k_2 \in K \text{ und } \lambda \in [0, 1] \\ \text{gilt: } (\psi(b))(\lambda(k_1 + H) + (1-\lambda)(k_2 + H)) &= \\ = (\psi(b))((\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2) + H) &= b(\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2) = \\ = \lambda b(k_1) + (1-\lambda)b(k_2) &= \\ = \lambda(\psi(b))(k_1 + H) + (1-\lambda)(\psi(b))(k_2 + H). \end{aligned}$$

$\psi(b)$ ist stetig, da für jedes $x \in E$ gilt:
 $(\psi(b) \circ \phi)(x) = (\psi(b))(x + H) = b(x)$. Demnach ist $\psi(b) \circ \phi$ und damit auch $\psi(b)$ stetig.
 Daß ψ isometrisch ist, ergibt sich aus der folgenden Gleichung:

$$\|\psi(b)\| = \sup_{k \in K} |(\psi(b))(k + H)| = \sup_{k \in K} |b(k)| = \|b\|.$$

wir zeigen nun, daß $\psi(B)$ die Punkte von $\Phi(K)$ trennt: Nehmen wir an, daß

$$\psi(b)(k_1 + H) = (\psi(b))(k_2 + H), \text{ also}$$

$b(k_1) = b(k_2)$ für alle $b \in B$ gilt, so erhal-

ten wir $(k_1 - k_2) \in H$ und damit $k_1 + H =$

$= k_2 + H$. $\psi(B)$ liegt also dicht in $\mathcal{A}(\Phi(K))$.

Da mit B auch $\psi(B)$ abgeschlossen ist, gilt $\psi(B) = \mathcal{A}(\Phi(K))$, deshalb ist B isometrisch zu $\mathcal{A}(\Phi(K))$.

Wir nehmen nun an, daß $1_K \notin B$ und zeigen, daß

B isomorph zu einem Teilraum B_2 von $\mathcal{A}(K)$

ist, für den $1_K \in B_2$ gilt. Es sei $a \in (B \setminus \{0\})$.

Dann ist $\text{VR}(\{a\})$ komplementiert in B . Es

gibt also einen abgeschlossenen Unterraum B_1 von B mit $B = \text{VR}(\{a\}) \oplus B_1$. Wir wissen,

$$\text{daß } B = (\text{VR}(\{a\}) \oplus B_1) \simeq (\text{VR}(\{a\}) \times B_1) \simeq$$

$$\simeq (\text{VR}(\{1_K\}) \times B_1) \simeq (\text{VR}(\{1_K\}) \oplus B_1). \text{ Dann besitzt}$$

$B_2 := \text{VR}(\{1_K\}) \oplus B_1$ die gewünschten Eigenschaften.

III.3 Beweis von Satz III.1 :

Ist B ein Banachraum, so ist B isometrisch zu einem Teilraum von $\mathcal{A}(S)$, wobei S die Einheitskugel von B^* bezeichnet. Die Behauptung folgt dann wegen Lemma III. 2.

III.4 Satz:

Es sei F ein separabler Banachraum mit nicht-separablem Dual. Dann gibt es eine kompakte, konvexe Menge Y , einen zulässigen Teilraum $\tilde{F}$ von $C(Y)$ und eine bezüglich der Teilmengenrelation gerichtete Familie $(F_i)_{i \in I}$ zulässiger Teilräume F_i von $C(Y)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- 1) $F \simeq \tilde{F} = \bigcap_{i \in I} F_i$
- 2) $\partial_{\mathcal{K}_R}(\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcap_{i \in I} \partial_{\mathcal{K}_R}(F_i)$
- 3) Für jedes $i \in I$ ist F_i isomorph zu einem $C(X)$ -Raum.
- 4) Es existiert eine aufsteigend gefilterte Familie $(K_i)_{i \in I}$ von Teilmengen K_i von Y derart, daß für jedes $i \in I$ gilt:
 $\partial_{\mathcal{K}_R}(F_i) \subset \{x \in Y \mid x \text{ ist } K_i\text{-extremal}\}$ (s.S.31)

Beweis:

Wie wir bereits auf Grund von Satz III.1 wissen, existiert eine metrisierbare kompakte, konvexe Menge K mit $F \simeq \mathcal{A}(K)$. Die Behauptung folgt dann aus Satz II.1, wobei wir aus dem Beweis von Satz II.1 entnehmen, daß jeder der dort vorkommenden Räume B isomorph zu einem $C(X)$ -Raum ist.

III.5 Korollar:

Es sei B ein separabler Banachraum derart, daß $(B^*)_1$ eine überabzählbare, starke Berandung besitzt. Außerdem sei B isomorph zu einem Raum $\mathcal{C}(X)$ mit überabzählbarem X .

Dann existieren ein zu B isomorpher Teilraum B_1 von B und für jedes $k \in (B^*)_1$ ein Maß $\mu_k \in \mathcal{M}(E)$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Für jedes $b \in B$, und $k \in (B^*)_1$ gilt:

$$\langle b, k \rangle = \int_E \langle b, e \rangle d\mu_k(e) .$$

2) Für jedes $f \in C(E)$ existiert ein $b \in B$, derart, daß

$$\langle b, k \rangle = \int_E f(e) d\mu_k(e) \quad \text{für jedes}$$

$k \in (B^*)_1$ gilt.

Beweis:

Wir identifizieren B mit $\{f \in A((B^*)_1) \mid f(0)=0\}$

Wenn wir beachten, daß diese Menge in $\mathcal{F}_1((B^*)_1)$

komplementiert ist, erhalten wir die Behauptung mit Hilfe der Beweisidee von Korollar I.3.4 .

IV. Isometrische Charakterisierungen von $\mathcal{A}(K)$ -Räumen in der Klasse der Banachräume.

Der erste Teil des Beweises von Lemma III.2 führt zu einer isometrischen Charakterisierung von $\mathcal{A}(K)$ -Räumen.

IV.1 Proposition:

Ein Banachraum B ist genau dann isometrisch zu einem $\mathcal{A}(K)$ -Raum, wenn es eine w^* -abgeschlossene Hyperebene H in B^* gibt, für die $(B^*)_1 = \text{konv} ((H \cap (B^*)_1) \cup -(H \cap (B^*)_1))$ gilt.

Beweis:

Die Hyperebene H enthält nicht den $\underline{0}$ -Vektor, da anderenfalls $(B^*)_1$ in H läge. Für die w^* -kompakte, konvexe Menge $K := H \cap (B^*)_1$ und die kanonische, isometrische Einbettung ϕ von B in $\mathcal{A}(K)$ enthält also $\phi(B)$ die konstante Funktion 1_K .

Gemäß dem ersten Teil des Beweises von Lemma III.2 ist dann $\phi(B)$ isometrisch zu einem Raum $\mathcal{A}(K)$.

Die folgende isometrische Charakterisierung von $\mathcal{A}(K)$ -Räumen macht im Gegensatz zu der in IV.1 angegebenen keinen Gebrauch vom Dualraum B^* des Banachraumes B . In diesem Zusammenhang sei auf eine weitere von TAYLOR [14] stammende isometrische Charakterisierung der $\mathcal{A}(K)$ -Räume hingewiesen.

In diesem Kapitel bezeichnen wir für jeden Banachraum B die Einheitssphäre $\{x \in B \mid \|x\| = 1\}$ von B mit $\partial(B_1)$.

IV.2 Satz:

Ein reeller Banachraum B ist genau dann isometrisch zu einem $\mathcal{A}(K)$ -Raum, wenn eine abgeschlossene Teilmenge A von $\partial(B_1)$ und ein Punkt $z \in A$ existieren derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$1) A \cap (-A) = \emptyset.$$

$$2) [0, 1] \cdot A \text{ ist konvex.}$$

3) Ein Punkt $x \in B \setminus \{z\}$ ist genau dann in B_1 enthalten, wenn

$$\frac{z+x}{\|z+x\|} \in A \quad \text{und} \quad \frac{z-x}{\|z-x\|} \in A \quad \text{gilt.}$$

Beweis:

a) Es seien K eine kompakte, konvexe Menge, B ein Banachraum und ϕ eine Isometrie von B auf $\mathcal{A}(K)$. Setzen wir dann

$A := \{f \in \mathcal{A}(K) \mid f \geq 0, \|f\| = 1\}$ und $z := 1_K$, so genügen $A := \phi^{-1}(A)$ und $z := \phi^{-1}(z)$ den Bedingungen 1), 2) und 3) in B .

b) Es sei nun B ein Banachraum, für den 1), 2) und 3) erfüllt sind.

Wir definieren:

$$H := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda A, \quad ,$$

und sehen, daß für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $x \in H$ der Vektor αx in H liegt.

Daß mit x und y auch $(x + y)$ in H enthalten ist, ergibt sich aus folgender Überlegung:

Es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$, $a_1, a_2 \in A$ so gewählt, daß $x = \lambda a_1$ und $y = \mu a_2$. Da $[0, 1] \cdot A$ konvex ist, liegt wegen $(x + y) = (\lambda + \mu) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} a_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} a_2 \right)$ der Vektor $\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} a_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} a_2 \right)$ in $[0, 1] \cdot A$,

woraus folgt, daß $(x + y)$ in H enthalten ist.

H genügt außerdem der Gleichung $H \cap (-H) = \{0\}$;

denn nehmen wir an, daß $x \in (H \cap (-H))$, so existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ und $a_1, a_2 \in A$, sodaß

$\lambda a_1 = x = -\mu a_2$. Wegen $\|a_1\| = \|a_2\| = 1$ folgt daraus $\lambda = \mu$, und ergibt sich wegen $A \cap (-A) = \emptyset$, daß $\lambda = 0$, also $x = 0$ gilt. Demzufolge ist H ein Kegel in B . Wir bezeichnen mit $\leq$ die durch H definierte Ordnung auf B .

Dann erhalten wir die Gleichung

$$B_1 = \{y \in B \mid -z \leq y \leq z\}$$

aus der Äquivalenz der folgenden Aussagen:

α) $-z \leq y \leq z$.

β) $(y + z) \in H$ und $(z - y) \in H$.

γ) Es existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ mit :

$$(y + z) \in \lambda A \quad \text{und} \quad (z - y) \in \mu A .$$

δ) $\frac{y + z}{\|y + z\|} \in A$ und $\frac{z - y}{\|z - y\|} \in A$

ε) $\|y\| \leq 1$.

Der Vektor z ist Ordnungseins in $(B, \leq)$;
denn für jedes $x \in B$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, für das

$$x \in n \cdot B_1 = \{ y \in B \mid -nz \leq y \leq nz \} \quad \text{gilt.}$$

Wir zeigen jetzt, daß H abgeschlossen ist:

Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in H , welche gegen

$y \in B$ konvergiert. Wir wählen $\lambda_n \in \mathbb{R}$ und

$a_n \in A$ so, daß $z_n = \lambda_n a_n$, und erhalten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \| \lambda_n a_n \| = \| z \| . \text{ Ohne Beschränkung der}$$

Allgemeinheit sei $\| z \| \neq 0$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \| a_n - \frac{1}{\| z \|} z \| &= \frac{1}{\| z \|} (\| \| z \| \cdot a_n - z \|) = \\ &= \frac{1}{\| z \|} (\| \| z \| a_n - \lambda_n a_n + \lambda_n a_n - z \|) \leq \\ &\leq \frac{1}{\| z \|} (\| \| z \| \cdot a_n - \lambda_n a_n \| + \| \lambda_n a_n - z \|) = \\ &= \frac{1}{\| z \|} (\| \| z \| - \lambda_n \| \cdot \| a_n \| + \| \lambda_n a_n - z \|) = \\ &= \frac{1}{\| z \|} (\| \| z \| - \lambda_n \| + \| \lambda_n a_n - z \|) . \end{aligned}$$

Deshalb konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{\| z \|} z$.

Auf Grund der Abgeschlossenheit von A liegt also

$\frac{1}{\| z \|} z$ in A und damit z in H .

H ist demzufolge abgeschlossen. Daß $(B, \leq, z)$

Archimedisch geordnet ist, ergibt sich folgender-

maßen: Wir nehmen an, daß $y \in B$ und $n \cdot y \leq z$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Vektoren

$(z - n y)$ und $(\frac{1}{n} z - y)$ in H enthalten.

Da H abgeschlossen ist, liegt $-y$ wegen

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} z - y) = -y$ in H , und daraus folgt:

$y \leq 0$.

$(B, \leq, z)$ ist also ein Archimedisches geordneter Vektorraum mit Ordnungseins.

$\| \cdot \|_1$ sei die durch

$\|x\|_1 := \inf \{ \lambda > 0 \mid -\lambda z \leq x \leq \lambda z \}$ definierte

Norm. Dann ist auf Grund der Gleichung

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \inf \{ \lambda > 0 \mid -\lambda z \leq x \leq \lambda z \} = \\ &= \inf \{ \lambda > 0 \mid x \in \lambda B_1 \} = \|x\| \text{ der Raum } (B, \| \cdot \|) \end{aligned}$$

isometrisch zu dem Archimedisches geordneten Vektorraum $(B, \leq, z, \| \cdot \|_1)$. Wie wir wissen, ist jeder mit der Ordnungsnorm¹⁾ versehene, Archimedisches geordnete Vektorraum isometrisch zu einem $\mathfrak{A}(K)$ -Raum. Aus der obigen Überlegung ergibt sich demzufolge, daß auch $(B, \leq, z)$ zu einem $\mathfrak{A}(K)$ -Raum isometrisch ist.

1)

Ist A ein Archimedisches geordneter Vektorraum mit Ordnungseins e , so ist die Ordnungsnorm $\| \cdot \|_1$ auf A definiert durch $\|x\|_1 := \inf \{ \lambda > 0 \mid -\lambda e \leq x \leq \lambda e \}$.

V. Sätze vom Korovkin'schen Typ für $f(K)$ -Räume.

V.1 Definition:

Es sei B ein Banachraum.

Eine abzählbare Teilmenge $\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ von B' heißt

w -Erzeugendensystem für B^* vom l^1 -Typ

(bzw. vom $2^1|l^1$ -Typ) genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$1) \sup_{i \in \mathbb{N}} \|b_i\| < \infty.$$

2) Für jedes $x \in B^*$ existiert eine Folge $(\lambda_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$

in $\mathbb{R}$ derart, daß (bezüglich der w -Topologie)

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x) b_i \quad \text{und}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i(x)| < \infty \quad (\text{bzw. } \sum_{i=1}^{\infty} 2^i |\lambda_i(x)| < \infty)$$

Eine w -Basis $\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ von B^* , welche den obigen

Bedingungen genügt, heißt w -Basis für B' vom l^1 -Typ¹⁾.

V.2 Definition:

Es seien X ein kompakter Hausdorffraum, μ ein positives Radonmaß auf X und T ein linearer Teilraum von $C(X)$.

Wir sagen, T trennt μ -fast ganz X von X genau dann, wenn es eine Teilmenge Y von X gibt, welche die Bedingungen a) und b) erfüllt:

$$a) \mu(X \setminus Y) = 0.$$

b) T trennt Y von X .

1)

Es sei erwähnt, daß - im Gegensatz zur Definition einer Basis - für ein w -Erzeugendensystem $\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Darstellung $x = \sum \lambda_i b_i$ nicht notwendig eindeutig ist. Außerdem sei auf den in SINGLER [13], Kap. II, §10 vorkommenden Begriff der Basis vom Typ l_+ verwiesen, der eine gewisse Ähnlichkeit zu dem Begriff des Erzeugendensystems vom Typ l^1 aufweist.

V.3 Definition:

Es seien X ein kompakter Hausdorffraum, μ ein positives Radonmaß auf X und A ein zulässiger Teilraum von $C(X)$.

α) Ein linearer Teilraum T von A heißt Korovkinsystem für A bezüglich punktweiser Konvergenz genau dann, wenn für jede Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver, linearer Operatoren

$\psi_n: A \longrightarrow A$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\| < \infty$ die folgende

Bedingung erfüllt ist:

Konvergiert für alle $t \in T$ die Folge $(\psi_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen t , so konvergiert für alle $f \in A$ die Folge $(\psi_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen f .

β) Ein linearer Teilraum T von A heißt μ -Korovkinsystem für A bezüglich punktweiser Konvergenz genau dann, wenn für jede meßbare Teilmenge X_0 von X mit $\mu(X \setminus X_0) = 0$ und für jede Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver, linearer Operatoren

$\psi_n: A \longrightarrow A$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\| < \infty$ die folgende Aus-

sage richtig ist:

Konvergiert für alle $t \in T$ die Folge $(\psi_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ auf X_0 punktweise gegen t , so konvergiert für alle $f \in A$ die Folge $(\psi_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ auf X punktweise gegen f .

γ) Ein linearer Teilraum T von A heißt μ -Korovkinsystem für A bezüglich gleichmäßiger Konvergenz genau dann, wenn es eine Folge $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen X_i von X mit den

folgenden Eigenschaften gibt:

- 1) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = X$.
- 2) Für jede Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver, linearer Operatoren $\psi_n: A \longrightarrow A$ und für jede meßbare Teilmenge X_0 von X mit $\mu(X \setminus X_0) = 0$ gilt:
 Konvergiert für alle $t \in T$ die Folge $(\psi_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ auf X_0 gleichmäßig gegen t , so konvergiert für alle $f \in A$ und $i \in \mathbb{N}$ die Folge $(\psi_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ auf X_i gleichmäßig gegen f .

V.4 Bemerkung:

Jedes μ -Korovkinsystem bezüglich punktweiser Konvergenz ist ein Korovkinsystem bezüglich punktweiser Konvergenz.

V.5 Satz:

Es sei K eine kompakte, konvexe Menge. Besitzt $\mathfrak{A}^*(K)$ ein w^* -Erzeugendensystem vom l^1 -Typ (bzw. vom $2^1|l^1$ -Typ), so gibt es ein von $Ex(K)$ getragenes Maß μ auf K derart, daß jeder μ -fast ganz K von K trennende, l_K enthaltende Teilraum T von $\mathfrak{A}(K)$ ein μ -Korovkinsystem für $\mathfrak{A}(K)$ bezüglich punktweiser (bzw. gleichmäßiger) Konvergenz ist.

Für den Beweis von Satz V.5 benötigen wir die folgenden Hilfssätze.

V.6 Lemma:

Es seien K eine kompakte, konvexe Menge und $\psi: \mathcal{A}(K) \rightarrow \mathcal{A}(K)$ ein positiver, linearer Operator. Dann existieren Abbildungen $\pi: K \rightarrow K$ und $\alpha: K \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß für alle $f \in \mathcal{A}(K)$ und $x \in K$ die Gleichung $(\psi(f))(x) = \alpha(x) f(\pi(x))$ gilt.

Beweis:

Für jedes $x \in K$ ist durch $l_x(a) := (\psi(a))(x)$

ein lineares, positives Funktional l_x auf

$\mathcal{A}(K)$ definiert. Es existieren also für jedes $x \in K$ genau ein Punkt $\pi(x) \in K$ und genau ein $\alpha(x) \in \mathbb{R}$, so daß $(\psi(a))(x) = \alpha(x) \cdot a(\pi(x))$

für alle $a \in \mathcal{A}(K)$ gilt.

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und ist Z eine Teilmenge von X , so bezeichne im folgenden $f|_Z$ die Restriktion von f auf Z .

V.7 Lemma:

Es seien K eine kompakte, konvexe Menge,

$(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver, linearer Opera-

toren $\psi_n: \mathcal{A}(K) \rightarrow \mathcal{A}(K)$, T ein linearer Teil-

raum von $\mathcal{A}(K)$ mit $1_K \in T$ und K' eine kompakte

Teilmenge von K mit den folgenden Eigenschaften:

1) T trennt K' von K .

2) $(\psi_n(t)|_{K'})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen

$t|_{K'}$ für jedes $t \in T$.

Dann konvergiert $(\pi_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig

gegen id_K . (Dabei sei π_n gemäß Lemma V.6

so gewählt, daß $\psi_n(a) = \alpha_n \circ a \circ \pi_n$ für

$a \in \mathcal{A}(K)$ gilt.)

Beweis:

Wir nehmen an, die Behauptung ist falsch.

Dann gibt es eine Q -Umgebung U in $(\mathcal{A}^*(K), w^*)$

und eine Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K derart, daß

V.8 $(\pi_n(k_n) - k_n) \notin U$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir wählen eine konvergente Teilfolge $(k_{n(m)})_{m \in \mathbb{N}}$

von $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für die $(\pi_{n(m)}(k_{n(m)}))_{m \in \mathbb{N}}$ konver-

giert, und definieren:

$$k' := \lim_{m \rightarrow \infty} (k_{n(m)}), \quad k := \lim_{m \rightarrow \infty} \pi_{n(m)}(k_{n(m)}).$$

Nehmen wir an, daß $k = k'$, so erhalten wir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\pi_{n(m)}(k_{n(m)}) - k_{n(m)}) = 0, \text{ also}$$

$$(\pi_{n(m)}(k_{n(m)}) - k_{n(m)}) \in U \text{ für schließlich alle}$$

$m \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu V.8. Demnach gilt:

$k \neq k'$. Gemäß unserer Voraussetzung konvergiert

für alle $t \in T$ die Folge $(\alpha_n(t \circ \pi_n)|_K)_{n \in \mathbb{N}}$

gleichmäßig gegen $t|_K$. Dies führt zu den folgen-

den drei Aussagen:

a) $(\alpha_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $1_{K'}$.

b) Für alle $t \in T$ konvergiert

$$(\alpha_{n(m)}(k_{n(m)}) \cdot t(\pi_{n(m)}(k_{n(m)})))_{m \in \mathbb{N}} \text{ gegen } t(k').$$

$$c) \lim_{m \rightarrow \infty} t(\pi_{n(m)}(k_{n(m)})) = t(k) \quad \text{für alle } t \in T.$$

Aus a), b), und c) können wir dann für jedes $t \in T$ die Gleichung

$$\begin{aligned} t(k') &= \lim_{m \rightarrow \infty} (k_{n(m)}(k_{n(m)}) \cdot t(\pi_{n(m)}(k_{n(m)}))) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{n(m)}(k_{n(m)}) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} t(\pi_{n(m)}(k_{n(m)})) = \\ &= 1 \cdot t(k) = t(k) \quad \text{herleiten, was im Widerspruch} \\ &\text{zu Voraussetzung 2) steht.} \end{aligned}$$

V.9 Lemma:

Unter den Voraussetzungen von Lemma V.7 konvergiert für jede Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ die Folge $(f \circ \pi_n|_{K'})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|_{K'}$.

V.10 Beweis von Satz V.5 :

1. Fall: $\mathcal{N}(K)$ besitzt ein w^* -Erzeugendensystem vom l^1 -Typ.

Konstruktion des Maßes μ :

Es sei $\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ein w^* -Erzeugendensystem

für $\mathcal{N}(K)$ vom l^1 -Typ. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gibt es ein von $\text{Ex}(K)$ getragenes Maß μ_i derart, daß

$$\int x \, d\mu_i(x) = b_i \quad \text{gilt. Wir definieren für } i \in \mathbb{N}$$

$$\nu_i := \frac{1}{2^i} \mu_i \quad \text{und weiter: } \mu := \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i.$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\nu_i| \right) \text{ ist norm-konvergent, da } \{|\mu_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$$

norm-beschränkt ist.)

Es sei nun T ein μ -fast ganz K von K trennender, 1_K enthaltender Teilraum von $\mathcal{A}(K)$.

Weiter seien eine Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver,

linearer Operatoren auf $\mathcal{A}(K)$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\| < \infty$

und ein $X_0 \subset K$ so gewählt, daß

$$\mu(K \setminus X_0) = 0, \quad \text{und}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\psi_n(t))(x) = t(x) \quad \text{für jedes } x \in X_0 \text{ und } t \in T.$$

Dann gibt es eine Teilmenge X_1 von K mit den folgenden Eigenschaften:

- i) T trennt X_1 von K .
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\psi_n(t))(x) = t(x)$ für alle $x \in X_1$ und $t \in T$.
- ii) $\mu(K \setminus X_1) = 0$.

Für $f \in \mathcal{A}(K)$ bezeichne $\tilde{f}$ das der Funktion f entsprechende, μ -stetige, lineare Funktional auf $\mathcal{V}(K)$.

Für $i \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{A}(K)$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \text{Y.11} \quad \frac{1}{2i} |(\widetilde{\psi_n(f)} - \tilde{f})(b_i)| &= \frac{1}{2i} |(\widetilde{\psi_n(f)} - \tilde{f})\left(\int x \, d\mu_i(x)\right)| = \\ &= \left| \int (\psi_n(f) - f) \, d\mu_i \right| \leq \int |\psi_n(f) - f| \, d|\mu_i| \leq \\ &\leq \int |\psi_n(f) - f| \, d\mu. \end{aligned}$$

Wir werden nun die Gleichung

$$\text{Y.12} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int |\psi_n(f) - f| \, d\mu \right) = 0 \quad \text{beweisen:}$$

Wegen Lemma V.7 und Bedingung ii) konvergiert für $x \in X_1$ die Folge $(\pi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x ,

also konvergiert $(\psi_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ auf X_1 punktweise

gegen $f|_{X_1}$. Deshalb folgt Gleichung Y.12,

wobei wir beachten müssen, daß $\|\psi_n(f) - f\| \leq$

$$\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\| \right) \cdot \|f\| + \|f\| < \infty.$$

Durch die Abschätzung V.11 erhalten wir dann für jedes $i \in \mathbb{N}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} |(\psi_n(f) - f)(b_i)| = 0$.

Da für $x \in K$ die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(\psi_n(f) - f)(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x) \cdot (\psi_n(f) - f)(b_i) \right|$$

gilt, reicht es zum Nachweis der punktweisen Konvergenz von $(\psi_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ zu zeigen, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x) \cdot (\psi_n(f) - f)(b_i) \right| = 0 \quad \text{für jedes } x \in K$$

richtig ist.

Setzen wir für $i, n \in \mathbb{N}$

$$a_{in} := \lambda_i(x) \cdot (\psi_n(f) - f)(b_i) \quad , \text{ so existiert}$$

ein $M \in K$ derart, daß $|a_{im}| \leq M \cdot |\lambda_i(x)|$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{in} = 0 \quad \text{für alle } x \in K \text{ und } i, m \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Wir erhalten dann die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \text{V.13} \quad \sum_{i=1}^{\infty} M \cdot |\lambda_i(x)| &= \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (M \cdot |\lambda_i(x)| - |a_{in}|) = \\ &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^m (\lim_{n \rightarrow \infty} (M \cdot |\lambda_i(x)| - |a_{in}|)) \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V.14} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} (M \cdot |\lambda_i(x)| - |a_{in}|)) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} (M \cdot |\lambda_i(x)| - |a_{in}|) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \sum_{i=1}^m (M \cdot |\lambda_i(x)| - |a_{in}|) \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \sum_{i=1}^{\infty} (M \cdot |\lambda_i(x)| - |a_{in}|) = . \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} M \cdot |\lambda_i(x)| - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sum_{i=1}^{\infty} |a_{in}| \quad . \end{aligned}$$

Aus V.13 und V.14 folgt die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} M \cdot |\lambda_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} M \cdot |\lambda_i(x)| - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sum_{i=1}^{\infty} |a_{in}|$$

Deshalb gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{in}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sum_{i=1}^{\infty} |a_{in}| = 0, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x) \cdot (\overline{\psi_n(f)} - \tilde{f})(b_i) \right| &\leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i(x)| \cdot |(\overline{\psi_n(f)} - \tilde{f})(b_i)| = 0. \end{aligned}$$

2. Fall:

$\mathcal{A}^*(K)$ besitzt ein w^* -Erzeugendensystem vom $2^{|I|}$ -Typ.

1. Konstruktion des Maßes μ wie im ersten Fall.
2. Konstruktion der Teilmengen $X_n \subset K$:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$X_n := \left\{ x \in K \mid \sum_{i=1}^{\infty} i |\lambda_i(x)| < n \right\}$$

T trenne μ -fast ganz K von K , weiter sei $X_n \subset K$ so gewählt, daß $(\psi_n(t)|_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ für

jedes $t \in T$ gleichmäßig gegen $t|_{X_n}$ konver-

giert, und $\mu(K \setminus X_n) = 0$ gilt.

Dann existiert eine Teilmenge M von K , für welche die folgenden Aussagen richtig sind:

- a) $\mu(K \setminus M) = 0$.
- b) T trennt M von K .
- c) $(\psi_n(t)|_M)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig

gegen $t|_M$ für jedes $t \in T$.

Für $i \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$b'_i := \left\{ x \mid d\psi_i(x) \right\}.$$

Dann können wir zeigen, daß für alle $f \in \mathcal{A}(K)$ die Folge $(\psi_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\{b_i^1 | i \in \mathbb{N}\}$ gleichmäßig gegen f konvergiert:

Für jedes $\varepsilon > 0$ und $i \in \mathbb{N}$ wählen wir eine kompakte Teilmenge K_ε von M mit $\mu(M \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ und

$$\text{setzen } b_i^\varepsilon := \int_{K_\varepsilon} x \, d\nu_i(x) .$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$:

Wegen (C) und (D) konvergiert gemäß Lemma V.7 die Folge $(\psi_n|_{K_\varepsilon})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\text{id}|_{K_\varepsilon}$,

was die gleichmäßige Konvergenz von $((\psi_n(f) - f)|_{K_\varepsilon})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 und damit die nächste Aussage zur Folge hat.

V.15 Für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|\psi_n(f) - f\|_{K_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{\mu(K)} .$$

Beachten wir, daß

$$\begin{aligned} (\widetilde{\psi_n(f)} - \widetilde{f})(b_i^\varepsilon) &= (\widetilde{\psi_n(f)} - \widetilde{f})\left(\int_{K_\varepsilon} x \, d\nu_i(x)\right) = \\ &= \int_{K_\varepsilon} \psi_n(f) - f \, d\nu_i , \text{ so erhalten wir für} \end{aligned}$$

alle: $i, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{V.16 } |(\widetilde{\psi_n(f)} - \widetilde{f})(b_i^\varepsilon)| &\leq \|\psi_n(f) - f\|_{K_\varepsilon} \cdot |\nu_i|(K) \leq \\ &\|\psi_n(f) - f\|_{K_\varepsilon} \cdot \mu(K) . \end{aligned}$$

V.17 Aus V.15 und V.16 folgt die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ von der Art, daß für alle $m \geq n$ und $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|(\widetilde{\psi_m(f)} - \widetilde{f})(b_i^\varepsilon)| \leq \varepsilon .$$

Da $(\alpha_n|_M)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen 1_M konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für jedes $n \geq n_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Y.18 } \|\psi_n(f) - f\|_M &\leq \|\psi_n(f)\|_M + \|f\|_M = \\ &= \|\alpha_n \cdot (f \circ \pi_n)\|_M + \|f\|_M \leq (\|f\|_M + 1) + \|f\|_M \leq \\ &\leq 2\|f\|_M + 1. \end{aligned}$$

Wir benötigen noch eine weitere Abschätzung

Y.19 Für alle $n, i \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} &|(\widetilde{\psi_n(f)} - \widetilde{f})(b'_i) - (\widetilde{\psi_n(f)} - \widetilde{f})(b'_i)^\epsilon| = \\ &= |(\widetilde{\psi_n(f)} - \widetilde{f})(b'_i - b'_i)^\epsilon| = \\ &= |(\widetilde{\psi_n(f)} - \widetilde{f}) \left(\int_{M \setminus K_\epsilon} x \, d\nu_i(x) \right)| \leq \\ &\leq \int_{M \setminus K_\epsilon} |\psi_n(f) - f| \, d|\nu_i| \leq \\ &\leq \|\psi_n(f) - f\|_M \cdot |\nu_i|(M \setminus K_\epsilon) \leq \\ &\leq \|\psi_n(f) - f\|_M \cdot \mu(M \setminus K_\epsilon) \leq \\ &\leq \|\psi_n(f) - f\|_M \cdot \epsilon. \end{aligned}$$

Aus Y.18 und Y.19 erhält man sofort die nächste Aussage:

Y.20 Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ und $i \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} &|(\widetilde{\psi_n(f)} - \widetilde{f})(b'_i - b'_i)^\epsilon| \leq \\ &\leq (2\|f\|_M + 1) \cdot \epsilon. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Abschätzung

$$Y.21 \quad |(\widetilde{\psi_n}(f) - \widetilde{f})(b'_i)| =$$

$$= |(\widetilde{\psi_n}(f) - \widetilde{f})(b'_i) + (\widetilde{\psi_n}(f) - \widetilde{f})(b'_i) - (\widetilde{\psi_n}(f) - \widetilde{f})(b'_i)| \leq \\ \leq |(\widetilde{\psi_n}(f) - \widetilde{f})(b'_i)| + |(\widetilde{\psi_n}(f) - \widetilde{f})(b'_i - b'_i)|$$

ergibt sich aus Y.17 und Y.20 die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ und $i \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$|(\widetilde{\psi_n}(f) - \widetilde{f})(b'_i)| \leq \varepsilon + (2\|f\|_M + 1)\varepsilon = \\ = (2\|f\| + 2) \cdot \varepsilon.$$

$(\psi_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also auf $\{b'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

gleichmäßig gegen f .

Wir zeigen jetzt, daß für $j \in \mathbb{N}$ die Folge

$(\psi_n(f)|_{X_j})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|_{X_j}$

konvergiert:

Wie aus der gleichmäßigen Konvergenz von $(\psi_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\{b'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gegen Q hervor-

geht, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ und $x \in X_j$ die folgende Ungleichung

richtig ist:

$$|(\psi_n(f) - f)(x)| = \left| \sum_{i=1}^{(\infty)} \lambda_i(x) \cdot (\widetilde{\psi_n}(f) - \widetilde{f})(b'_i) \right| = \\ = \left| \sum_{i=1}^{(\infty)} \lambda_i(x) \cdot (\widetilde{\psi_n}(f) - \widetilde{f})(b'_i) \right| \leq \\ \leq \sum_{i=1}^{(\infty)} 2^i |\lambda_i(x)| \cdot |(\widetilde{\psi_n}(f) - \widetilde{f})(b'_i)| \leq \\ \leq \sum_{i=1}^{(\infty)} 2^i |\lambda_i(x)| \cdot \varepsilon \leq j \cdot \varepsilon$$

V.22 Proposition:

Es seien K eine kompakte, konvexe Menge,
 E eine Berandung von K und T ein 1_K enthal-
 tener Teilraum von $\mathcal{A}(K)$, welcher E von K trennt.

Dann gilt für jede Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver,
 linearer Operatoren $\psi_n: \mathcal{A}(K) \rightarrow \mathcal{A}(K)$ mit

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\| < \infty :$$

Konvergiert $(\psi_n(t)|_E)_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $t \in T$

punktweise gegen $t|_E$, so konvergiert

$(\psi_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $f \in \mathcal{A}(K)$ punktweise
 gegen f .

Beweis:

Konvergiert $(\psi_n(t)|_E)_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $t \in T$ punkt-
 weise gegen $t|_E$, so konvergiert gemäß Lemma V.7

für jedes $f \in \mathcal{A}(K)$ die Folge $(\psi_n(f)|_E)_{n \in \mathbb{N}}$

punktweise gegen $f|_E$. Daraus folgt die Be-

hauptung, da die Restriktionsabbildung $|_E$ ein

Isomorphismus von $\mathcal{A}(K)$ auf $\{a|_E \mid a \in \mathcal{A}(K)\}$
 ist.

V.23 Korollar:

Voraussetzung: X ist ein metrisierbarer, kompakter Raum, A ist ein zulässiger Teilraum von $C(X)$, und A^* besitzt ein w^* -Erzeugendensystem vom 1^1 -Typ.

Behauptung: Es existiert ein positives Radonmaß μ auf X mit den folgenden Eigenschaften:

- 1) Jeder punkt-trennende, 1_X enthaltende Teilraum B von A mit $\mu(\partial_{\text{cl}}(A) \setminus \partial_{\text{cl}}(B)) = 0$ ist ein μ -Korovkinsystem für A bezüglich punktwieser Konvergenz.
- 2) Für jede Baire-Menge S in X mit $(S \cap \partial_{\text{cl}}(A)) = \emptyset$ gilt: $\mu(S) = 0$.

Beweis:

$S(A)$ bezeichne den Zustandsraum von A .

Dann besitzt $\hat{A}(S(A))$ ein w^* -Erzeugendensystem vom 1^1 -Typ, und es existiert, wie wir gemäß Satz V.5 wissen, ein von $\text{Ex}(S(A))$ getragenes Maß μ' mit der folgenden Eigenschaft:

Jeder μ' -fast ganz $S(A)$ von $S(A)$ trennende Teilraum T' von $\hat{A}(S(A))$ mit $1_{S(A)} \in T'$ ist ein

μ' -Korovkinsystem für $\hat{A}(S(A))$ bezüglich punktwieser Konvergenz.

Es seien $\phi: X \rightarrow S(A)$ der kanonische Homöomorphismus und μ das durch $\mu(S) := \mu'(\phi(S))$ auf X definierte Maß. Wir zeigen nun, daß μ der Bedingung 1) genügt:

Hierzu nehmen wir an, daß B ein punktetrennender Teilraum von A ist mit $1_X \in B$ und

$$\mu(\mathcal{D}_{\mathcal{A}}(A) \setminus \mathcal{D}_{\mathcal{A}}(B)) = 0.$$

Für $M := (\mathcal{D}_{\mathcal{A}}(A) \setminus \mathcal{D}_{\mathcal{A}}(B))$ gilt: $\mu'(\phi(M)) = 0$.

Auf Grund der Metrisierbarkeit von $S(A)$ ist $\text{Ex}(S(A))$ meßbar, außerdem ist μ' von $\text{Ex}(S(A))$ getragen, was zur Folge hat, daß

$$\mu'(\text{Ex}(S(A)) \setminus \text{Ex}(S(A))) = 0, \text{ also}$$

$$\mu'((\text{Ex}(S(A)) \setminus \text{Ex}(S(A))) \cup \phi(M)) = 0 \text{ gilt.}$$

Das kanonische Bild B_1 von B in $\mathcal{A}(S(A))$ trennt μ' -fast ganz $S(A)$ von $S(A)$; denn nehmen wir an, daß $k \in \text{Ex}(S(A)) \cap (S(A) \setminus \phi(M))$. Dann gibt es ein $x \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}(B)$ mit $k(b) = b(x)$ für jedes $b \in B$ und wir sehen, daß B_1 die Menge $\text{Ex}(S(A)) \cap (S(A) \setminus \phi(M))$ von $S(A)$ trennt.

$$\text{Da } \mu'(S(A) \setminus [\text{Ex}(S(A)) \cap (S(A) \setminus \phi(M))]) =$$

$$= \mu'((S(A) \setminus \text{Ex}(S(A))) \cup \phi(M)) = 0,$$

trennt B_1 also μ' -fast ganz $S(A)$ von $S(A)$.

Infolgedessen ist nach Satz V.5 B_1 ein μ' -Korovkinsystem für $\mathcal{A}(S(A))$ bezüglich punktweiser Konvergenz.

Daraus folgt, daß B ein μ -Korovkinsystem für A bezüglich punktweiser Konvergenz ist.

V.24 Proposition:

Ist X ein metrisierbarer kompakter Raum und ist A ein zulässiger, komplementierter Teilraum von $C(X)$ mit separablem Dual A^* , so gilt die Behauptung von Korollar V.23 für X und A .

Beweis:

Wir weisen zunächst auf ein Resultat von LEWIS - STEGALL [7] hin:

Der Dualraum eines separablen unendlich-dimensionalen $\mathcal{L}_\infty$ -Raumes ist entweder zu l^1 oder zu $C([0,1])$ isomorph.

A ist komplementierter Teilraum eines $\mathcal{L}_\infty$ -Raumes und somit selbst ein $\mathcal{L}_\infty$ -Raum. Da A^* separabel ist, muß gemäß dem oben erwähnten Resultat A^* zu l^1 isomorph sein. Demzufolge besitzt A^* ein w^* -Erzeugendensystem vom l^1 -Typ.

V.25 Korollar:

Ist X ein metrisierbarer kompakter Raum und ist A ein zulässiger, komplementierter Teilraum von $C(X)$ mit separablem Dual, so existiert ein positives Radonmaß μ auf X derart, daß jeder punktgetrennende Teilraum B von A mit $1_X \in B$ und $\mu(X \setminus \partial_{\text{cl}}(B)) = 0$ ein Korovkinsystem für A ist.

Beweis:

Die Behauptung folgt aus Proposition V.24 auf Grund der folgenden Relation:

$$\mu(\partial_{\text{cl}}(A) \setminus \partial_{\text{cl}}(B)) \leq \mu(X \setminus \partial_{\text{cl}}(B)) = 0.$$

Diese Ungleichung geht auf die Teilmengenrelation $(\partial_{\text{cl}}(A) \setminus \partial_{\text{cl}}(B)) \subset (X \setminus \partial_{\text{cl}}(B))$ zurück.

Wir geben nun ein einfaches Beispiel für die Anwendung der Beweise von Satz V.5 und Korollar V.23 an.

V.26 Proposition:

Es existiert eine Teilmenge A von $C([0,1])$ derart, daß für A und das Maß $\mu := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \delta_{\frac{1}{2^i}}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- 1) A ist ein zulässiger Teilraum von $C([0,1])$.
- 2) $\partial_{\mathcal{C}}(A) = [0,1]$.

- 3) Jeder punktgetrennende Teilraum B von A , der 1 $[0,1]$ enthält und für den

$$\mu([0,1] \setminus \partial_{\mathcal{C}}(B)) = 0 \text{ gilt, ist ein}$$

μ -Korovkinsystem für A bezüglich punktweiser Konvergenz.

Beweis:

Es sei A wie in Beispiel I.2.12 gewählt. Daß A und μ der Bedingung 3) genügen, ergibt sich aus den Beweisen von Satz V.5 und Korollar V.23, und dem folgenden Hilfssatz.

V.27 Lemma:

$\left\{ \delta_{\frac{1}{2^i}}^A \mid i \in \mathbb{N} \right\}$ ist ein w^2 -Erzeugendensystem

für A^* vom l^1 -Typ.

Beweis:

Es sei $\Phi: A \rightarrow c$ wie in I.2.13 gewählt, weiter sei $l \in A^*$:

Dann ist $l \circ \Phi^{-1}$ in c^* enthalten.

Deshalb existiert eine Folge $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^1$,

so daß

$$l \circ \Phi^{-1}(c_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j c_j \text{ für jedes } (c_i) \in c$$

gilt. Daraus erhalten wir für $a \in A$ die Gleichung.

$$1(a) = 1 \circ \varphi^{-1}(\varphi(a)) = 1 \circ \varphi^{-1}((a(\frac{1}{i}))_{i \in \mathbb{N}}) = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a(\frac{1}{i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{\frac{1}{i}}^A(a).$$

Demnach gilt:

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \delta_{\frac{1}{i}}^A \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty.$$

Für die im Beweis von V.26 angegebene Teilmenge A von $C([0,1])$ besitzt A^* nach Lemma V.27 ein w^* -Erzeugendensystem vom l^1 -Typ. Es stellt sich hier die Frage, ob auch $C([0,1])$ solch ein Erzeugendensystem besitzt. Das folgende Resultat liefert eine negative Antwort auf diese Frage.

V.27 Proposition:

Ist X ein überabzählbarer, metrisierbarer kompakter Raum, so besitzt $C(X)$ kein w^* -Erzeugendensystem vom l^1 -Typ, insbesondere besitzt $C(X)$ keine w^* -Basis vom l^1 -Typ.

Beweis:

Wir nehmen an, die Behauptung ist falsch.

Dann existiert nach Korollar V.23 ein positives Radonmaß μ auf X derart, daß jeder punkte-trennende und 1_X enthaltende Teilraum B von

$C(X)$ mit $\mu(X \setminus \bigcup_{f \in B} \{f > 0\}) = 0$ ein μ -Korovkin-

system für $C(X)$ bezüglich punktweiser Konvergenz ist.

Es seien x_0, x_1 und x_2 paarweise verschiedene

Punkte aus X mit $\mu(\{x_0\}) = 0$.

Dann erhalten wir für

$$T := \left\{ f \in C(X) \mid f(x_0) = \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) \right\}$$

die Gleichung:

$$\partial_{\mathcal{C}_\mu}(T) = (X \setminus \{x_0\}) \quad , \quad \text{aus der}$$

$$\mu(X \setminus \partial_{\mathcal{C}_\mu}(T)) = \mu(\{x_0\}) = 0 \quad \text{folgt.}$$

Gemäß unserer Voraussetzung ist T ein Korovkinsystem für $C(X)$ bezüglich punktweiser Konvergenz. Deshalb gilt, wie im folgenden gezeigt wird, $\partial_{\mathcal{C}_\mu}(T) = X$ im Widerspruch zu der

$$\text{Gleichung } \partial_{\mathcal{C}_\mu}(T) = (X \setminus \{x_0\}) \quad .$$

Den Beweis der letzten Schlußfolgerung übernehmen wir von BAUER [1] (S.258) :

Wir setzen voraus, daß T ein Korovkinsystem ist und zeigen, daß x_0 in $\partial_{\mathcal{C}_\mu}(T)$ liegt.

Dazu nehmen wir an, μ_c ist eine positive, lineare Fortsetzung von $\tilde{\mu}_{x_0}^T$ auf $C(X)$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $q_n : X \rightarrow [0, 1]$

eine stetige Funktion mit $q_n(x_0) = 1$ und

$$q_n|_{X \setminus K_{\frac{1}{n}}(x_0)} = 0$$

Durch $L_n(g) := \left(\int g \, d\mu_c \right) \cdot q_n + g - g \cdot q_n$

ist ein positiver, linearer Operator

$L_n : C(X) \rightarrow C(X)$ definiert.

Dann gelten für jedes $t \in T$ die folgenden Gleichungen:

$$L_n(t) = t(x_0) \cdot q_n + t - t \cdot q_n \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (L_n(t))(x) &= t(x_0) \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x) + t(x) - \\ &- t(x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x) = t(x) \quad . \end{aligned}$$

Da $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n\| < \infty$ und T nach Voraussetzung

ein Korovkinsystem ist, erhält man für alle $f \in C(X)$ und $x \in X$:

$\lim_{n \rightarrow \infty} (L_n(f))(x) = f(x)$. Wegen $L_n(f)(x_c) =$
 $= \int f \, d\mu_c$ ergibt sich daraus für jedes
 $f \in C(X) : \int f \, d\mu_c = f(x_c)$. x_c liegt also
 in $\widehat{C_{\mathcal{Q}}}(T)$.

- [1] H. BAUER
Theorems of Korovkin type for adapted spaces,
Ann. Inst. Fourier, Grenoble 23 (1973), 245-260.

- [2] E. BEHKENDS
Reflexivität von Räumen stetiger affiner
Funktionen,
Math. Ann. 202 (1973) 209-214 .

- [3] Y. BENYAMINI
Separable G-spaces are isomorphic to
 $C(X)$ -spaces,
Israel J. Math. 14 (1973), 287-293 .

- [4] C. BESSAGA and A. PELCZYNSKI
Spaces of continuous functions IV,
Studia Math. 19 (1960), 53-62 .

- [5] R. B. HOLMES and J.D. WARD
An approximative property of spaces of
continuous functions,
Glasgow Math. J. 15 (1974), 48-53 .

- [6] W. B. JOHNSON and M. ZIPPIN
Separable L_1 -preduals are quotients of $C(\Delta)$,
Israel J. Math. 16 (1973), 198-202 .

- [7] D. R. LEWIS and C. STEGALL
Banach spaces whose duals are isomorphic
to $\Gamma(\Gamma)$,
Journal of Functional Analysis 12 (1973), 177-187.

- [8] J. LINDENSTRAUSS and A. PELCZYNSKI
Contributions to the theory of classical
Banach spaces,
Journal of Functional Analysis 8 (1971), 225-249.

- [9] A. PELCZYŃSKI
On $C(S)$ -subspaces of separable Banach spaces,
Studia Math. 31 (1968), 513-522.

- [10] A. PELCZYŃSKI
Projections in certain Banach spaces.
Studia Math. 19 (1960), 209-228.

- [11] H. P. ROSENTHAL
On factors of $C([0,1])$ with non-separable dual,
Israel J. Math. 13 (1972), 361-378.

- [12] Z. SEMADENI
Banach spaces of continuous functions 1,
PWN-Polish Scientific Publishers Warszawa(1971).

- [13] I. SINGER
Bases in Banach spaces I,
Grundlehren der math. Wissenschaften 154 (1970),
Springer Verl. Heidelberg.

- [14] P. D. TAYLOR
A Banach space characterization of the space
of affine continuous functions on a compact
convex set,
American Math. Monthly 80 (1973), 911-915

Lebenslauf

Ich wurde am 15.7.1950 in Bad Soden-Salmünster als Sohn des Abteilungsdirektors Dr. Otto Heß und seiner Ehefrau Dorothea, geb. Kastner, geboren.

Nach vierjährigem Volksschulbesuch in Coburg wurde ich in das dortige Gymnasium aufgenommen. Auf Grund einer Versetzung meines Vaters an die Regierung von Oberfranken wechselte ich 1961 in das humanistische Gymnasium von Bayreuth über, wo ich 1969 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 1969/70 begann ich das Studium der Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg. Ich hörte dort Vorlesungen der Herren Professoren H. Bauer, K. Jacobs, D. Kölzow und G. Nöbeling.

Die Diplomvorprüfung legte ich im Wintersemester 1971/72, die Diplomhauptprüfung im Februar 1974 ab.

Von 1971 bis 1974 war ich als studentische, von 1974 bis 1975 als wissenschaftliche Hilfskraft tätig.

Als Doktorand von Herrn Professor Dr. D. Kölzow erhielt ich ein Stipendium auf Grund des Graduiertenförderungsgesetzes.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990